現業用非静力学モデルにおける高次精度の差分

藤田　司（気象庁数値予報課）

1 現業用非静力学モデルの移流項

気象庁で現在開発が進められている非静力学モデル(NHM)は荒川C格子に変数を配置している。差分の式は2次の精度で、適宜2次の精度の中点内挿を行って、フラックス値を求めている。移流項については、高次精度の差分のほうが位相速度（分散）や数値的拡散によい特性を示すので、水平成分について、移流項の高次化を試みる。

2 スタガード系における差分式

3次から5次までの差分式を実装する。ここでは保存性を考えて、元の式に忠実に差分化することとする。NHM は C 格子を採用しているので、この場合、フラックス値の計算には内挿の手間がかかることになる。一方、精度の確保のために、切断誤差が小さいスタガード系の式で計算することとする。実際、最低次の中心差分である2次の場合、スタガード系の式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\varphi_{1/2}-\varphi_{-1/2}}{\Delta}+\frac{1}{24}\Delta^2\varphi^{(3)}+O(\Delta^4) \tag{1}$$

を用いると、アンスタガード系

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\varphi_{1}-\varphi_{-1}}{2\Delta}+\frac{1}{6}\Delta^2\varphi^{(3)}+O(\Delta^4) \tag{2}$$

の場合に比べ、主要な切断誤差が1/4である。ただし、ϕ はフラックスであって、例えば $\rho u\theta$ や ρuu であり、u と θ が異なる格子に配置されるので、計算上は適当な手法で内挿した上で与えることとなる。また4次の場合、次の式を得る。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{9}{8}\frac{\varphi_{1/2}-\varphi_{-1/2}}{\Delta}-\frac{1}{8}\frac{\varphi_{3/2}-\varphi_{-3/2}}{3\Delta}+\frac{3}{640}\Delta^4\varphi^{(5)}+O(\Delta^6) \tag{3}$$

主要な切断誤差を、アンスタガード系の式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{4}{3}\frac{\varphi_{1}-\varphi_{-1}}{2\Delta}-\frac{1}{3}\frac{\varphi_{2}-\varphi_{-2}}{4\Delta}+\frac{1}{30}\Delta^4\varphi^{(5)}+O(\Delta^6) \tag{4}$$

と比べると、1/7 程度になることが分かる。(1)から(4)のそれぞれについて、分散性は図 1 の通りとなる。差分表現について解像度が高くなるために、スタガード系のほうが分散性にも優れている。

一方、3 次や 5 次の上流差分で同様にスタガードの格子における値を用いるためには、スタガード格子における値だけでは与えることができない。その代わりに、当該格子点における値まで含む次式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{12\Delta}\left(9\varphi_{1/2}+8\varphi_{0}-18\varphi_{-1/2}+\varphi_{-3/2}\right)+\frac{1}{64}\Delta^3\varphi^{(4)}+O(\Delta^5) \tag{5}$$

を考えた。この式は、アンスタガードの式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{6\Delta}\left(\varphi_{1}-6\varphi_{0}-3\varphi_{-1}+2\varphi_{-2}\right)+\frac{1}{12}\Delta^3\varphi^{(4)}+O(\Delta^5) \tag{6}$$

と比べたときに、主要な切断誤差が 1/5 程度まで小さくなるという利点があるが、一方で、サンプリングが不等間隔になることによる計算上の不都合も考えられる。また当該格子における ϕ を内挿で与えることになるが、このことによる誤差の混入も避けられない。5 次の式は 3 次と同様に得られ、スタガード系の場合は、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{960\Delta}(-25\varphi_{3/2}+900\varphi_{1/2}+384\varphi_{0}-1350\varphi_{-1/2}+100\varphi_{-3/2}-9\varphi_{-5/3})-\frac{1}{512}\Delta^5\varphi^{(6)}+O(\Delta^6) \tag{7}$$

となり、またアンスタガード系の場合は、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{60\Delta}(-3\varphi_{2}+30\varphi_{1}+20\varphi_{0}-60\varphi_{-1}+15\varphi_{-2}-2\varphi_{-3})-\frac{1}{60}\Delta^5\varphi^{(6)}+O(\Delta^6) \tag{8}$$

となる。切断誤差はスタガード系がアンスタガードの約 1/8 である。

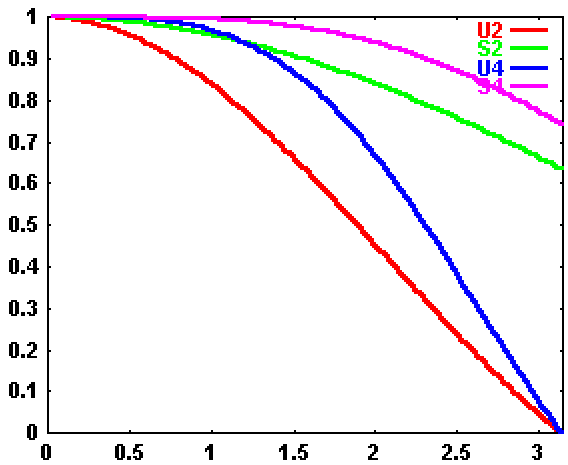

図1　2次と4次の差分スキームと分散性。縦軸が位相速度比で、1のとき解析解と等しい。横軸は波数 x 格子間隔。図中、U2 はアンスタガード2次、S2 はスタガード2次、U4 はアンスタガード4次、S4 はスタガード4次。

3 実験結果

まずはじめに、(5)や(7)のような、内挿を伴う不等間隔の差分で妥当な計算結果が得られるかという問題がある。予備的な実験によると、3,5 次の差分式でも特別な問題なく動作し、2 次や 4 次との結果との比較からも予報場には大きな違いがないことが分かった。ただし、数値拡散の効果が強くなるので、

その他の条件を同じにするのであれば、2 次や 4 次の場合よりも拡散係数を小さくしたほうがよいようである。また、NHM では θ のようなスカラー量の移流の計算の際に、フラックスの計算と合わせて運動量の発散を計算するが、この計算でも移流の差分と同じ式を用いなければ計算不安定が生じることが分かっている。図 2 は 2002 年 9 月 6 日 06UTC 初期値の予想で、上段が 2 次、中段が 4 次、下段が 5 次の精度の差分による結果である。この事例のような移流の見積りが重要と考えられる事例では違いが現れるであろうことが確認できた。

(5)や(7)の ϕ_0 を求めるためには適当な精度の中点内挿を行うことになるが、たとえば(5)で ϕ_0 に 4 次内挿値を代入すると(3)と同一になってしまい意味がない。ゆえ、積(フラックス値)の内挿を行うのではなく、内挿を行ってからフラックスを計算しなければならない。実際に、ϕ_0 への内挿に 2 次の精度の式を用いると、2 次や 4 次の差分式の場合と比べたときに系統的な違いが予報場に生じるケースがあることが分かった。ところが、内挿に 4 次の精度の式を用いると、この違いはかなり小さくなる。このことと、切断誤差についての精度を保つことを考えると、3,5 次の差分式では低次の内挿は適当ではないことが推定される。ただし、この時は上流側でも下流側でも参照範囲の広さが同じになるため、本来の上流差分との違いについて検証が必要と考えられる。

なお、C 格子の場合、ρuu のような項と $\rho u\theta$ のような項とで、同次でも別の差分式を用いて、内挿を避けることも可能であるが、この場合は領域内最大風速に高周波の振動が見られており、恐らく適当ではないことが分かっている。

4 今後の計画など

並列版 NHM では各ノードの保持する変数配列が担当領域より 1 格子広くなっているだけである。高次差分の計算のためには、この重なりをもっと広くするか、差分の計算を行うときに特に MPI 通信を行うかしなければならない。現在は実装上の簡単のために後者を採用しているが、この場合高次の差分のときのみ、通信に伴う余計なコストがかかり、特に奇数次の場合には高次内挿のためにさらにコストがかかる。全体からみればこのコストは必ずしも大きくないが(数%程度)、現業に適用するためには精度や特性の確認と合わせ最適化によるコストの削減が必要である。

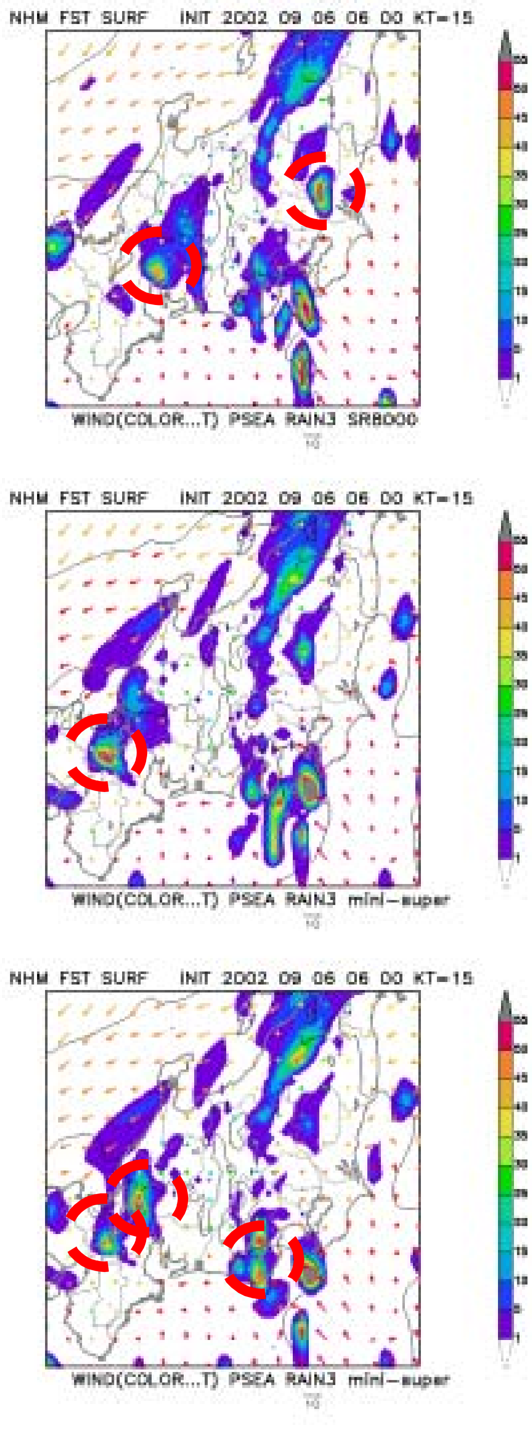

図 2　差分の精度による予想の違いの例。上段は 2 次の差分によるコントロールラン、中段は 4 次、下段は 5 次の差分による結果。この事例は太平洋高気圧の縁辺流による不安定による降水予測。