

基底関数展開法による雲微物理過程の数値計算

鈴木健太郎、中島映至（東京大学気候システム研究センター）

1 はじめに

数値モデルにおける雲微物理過程の計算は、これまで、大きく分けて Bin 法・Bulk 法の二通りの方法で行われてきた。単一の雲の内部構造を詳細に扱う雲解像モデルでは主に Bin 法が用いられ、大気循環モデルや領域モデルといった比較的広い領域を計算対象としたモデルでは主に Bulk 法が用いられてきた。

Bin 法は、雲の粒子サイズについて多数の Bin に離散化することで粒径分布関数を表現し、雲物理に基づく基礎方程式を数値的に解く方法である。この方法は雲の微物理構造の変化を詳細に扱うことができる反面、粒径分布関数を表現するために多数の Bin を必要とするため計算コストが高く、現在の計算機の能力では計算領域が数 km から数十 km に限られてしまう。

一方、Bulk 法では雲水量や雨水量といった巨視的な物理量を直接取り扱う。この方法では、多くの場合、凝結生成物を小粒子（雲・氷晶）と大粒子（雨・雪・霰）の二種類に分類し、これらの種類間の相互作用による巨視的な量の変化をパラメータ化に基づいて計算する。Bulk 法は計算コストが低く対象領域を広く取れるが、パラメータ化の仮定を含むので、微物理構造に深く立ち入る議論には適切でない場合が多い。

こうしたことから、従来、Bin 法・Bulk 法を用いる目的・立場は異なることが多く、両者の間には対象とする時空間スケールに大きな隔たりがあった。ところが近年、大気浮遊粒子（エアロゾル）が領域規模・全球規模で雲の微物理特性を変質させることが衛星観測によって指摘されるようになり、そのメカニズムの詳細な理解のためには、比較的広いスケールを対象としながらも雲の微物理構造に深く立ち入ることができるモデルが必要になりつつある。このような背景のもとで、本研究では Bin 法・Bulk 法の双方の考え方を含む形で一般化した定式化として、粒径分布関数を基底関数で展開することによって基礎方程式を離散化する数値解法を提案する。この方法では、基底関数の形状・個数の設定によって雲の粒径分布を表現する自由度が可変であるため、雲微物理過程の scalable な扱いが可能になると考えられる。なお、現時点では水雲の微物理過程のみ取り扱う。

2 基礎方程式

粒子質量 m の対数 $\eta = \ln m$ で表した粒子の質量濃度分布関数 $G(\eta, t)$ の微物理過程による変化は次式で表される：

$$\frac{\partial G(\eta, t)}{\partial t} = F[G(\eta, t)] = Q_{cond} + Q_{coag} \quad (1)$$

ただし、 Q_{cond} は凝結・蒸発過程を表し、

$$Q_{cond} = -\exp(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{G(\eta, t)}{\exp(\eta)} \frac{d\eta}{dt} \right) d\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \exp\left(-\frac{2}{3}\eta\right) F_c(T) S$$

と与えられる。 $F_c(T)$ は気温 T の関数、 S は過飽和度である。

Q_{coag} は衝突・併合過程を表し、次式で与えられる：

$$Q_{coag} = e^\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \hat{H}(\eta; \eta_1, \eta_2) \frac{G(\eta_1, t)}{e^{\eta_1}} \frac{G(\eta_2, t)}{e^{\eta_2}},$$

$$\hat{H}(\eta; \eta_1, \eta_2) = [\delta(e^\eta + e^{\eta_2}, e^{\eta_1}) - \delta(\eta_1, \eta) - \delta(\eta_2, \eta)] \frac{H(\eta_1, \eta_2)}{2},$$

$$H(\eta_1, \eta_2) = E(\eta_1, \eta_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |V(\eta_1) - V(\eta_2)|$$

ただし、関数 $E(\eta_1, \eta_2)$ は衝突効率、 r_1, r_2 は η_1, η_2 に対応する粒子半径、 $V(\eta)$ は落下速度である。

3 基底関数展開による離散化

粒径分布関数 $G(\eta, t)$ を既知の基底関数 $\{b_j(\eta)\}_{j=1, \dots, N}$ の線型結合：

$$\hat{G}(\eta, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) b_j(\eta) \quad (2)$$

で近似する。(2) 式を (1) 式に代入すると一般に残差 R が生じる：

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial t} = F[\hat{G}] + R[\hat{G}]$$

残差 R が何らかの意味で最小になるように係数 $\{c_j\}_{j=1, \dots, N}$ を決める。ここでは残差のノルム $\|R\|$ として

$$\|R\|^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\eta, t)]^2 d\eta$$

を採用し、これを最小にする。そのための条件は

$$\frac{\partial \|R\|^2}{\partial \dot{c}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

これより

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\eta, t) b_i(\eta) d\eta = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

を得る。これは、残差 R が基底関数と直交することを要請する。このことは、もともと無限次元の問題である基礎方程式 (1) を、基底関数 $\{b_j\}_{j=1, \dots, N}$ で張られる有限 (N) 次元部分空間に正射影して近似解を求めるということに他ならない。

(3) 式を具体的に表示すると、

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \frac{dc_j}{dt} = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} c_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma_{jk}^i c_j c_k, \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_{-\infty}^{+\infty} b_i(\eta) b_j(\eta) d\eta \\ \beta_{ij} &= -F_c(T) S \int_{-\infty}^{+\infty} b_i(\eta) e^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} [b_j(\eta) e^{-5\eta/3}] d\eta \\ \gamma_{jk}^i &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 [(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) b_i(\ln(e^{\eta_1} + e^{\eta_2})) \\ &\quad - e^{\eta_1} b_i(\eta_1) - e^{\eta_2} b_i(\eta_2)] H(\eta_1, \eta_2) \frac{b_j(\eta_1)}{e^{\eta_1}} \frac{b_k(\eta_2)}{e^{\eta_2}} \\ &\quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

行列 $[\alpha_{ij}]$ の逆行列を (4) の両辺に左からかけると、

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{j=1}^N p_{ij} c_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_{jk}^i c_j c_k, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

を得る。ただし、行列 $[\alpha_{ij}]$ の逆行列を $[\tilde{\alpha}_{ij}]$ として、

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^N \tilde{\alpha}_{il} \beta_{lj}, \quad q_{jk}^i = \sum_{l=1}^N \tilde{\alpha}_{il} \gamma_{jk}^l.$$

(5) 式は基礎方程式 (1) の基底関数展開による離散化表現である。右辺第一項は凝結・蒸発過程による変化、第二項は衝突・併合過程による変化をそれぞれ表す。第一項に現れる係数成分 p_{ij} は、 j 番目の基底関数が凝結・蒸発過程によって i 番目の基底関数方向にもたらす時間変化率を表す。第二項に現れる係数成分 q_{jk}^i は、 j 番目と k 番目の基底関数の衝突・併合が i 番目の基底関数方向にもたらす時間変化率を表す。

これらの係数成分は、上式を用いて数値積分で評価することになるが、(2) 式で変数分離を行った効用として時間依存性を含まないので、はじめに一度だけ計算しておけば、それらをその後の時間発展において常に用いることができる。

4 Bin 法・Bulk 法との関係

前節で述べた定式化は、基底関数 $\{b_j(\eta)\}_{j=1, \dots, N}$ の個数 N と形状を特別なものを選ぶことにより、従来の Bin 法・Bulk 法に帰着すると考えられる。

例えば N を大きな整数値にとり基底関数 $\{b_j\}_{j=1, \dots, N}$ を階段関数に選んだ定式化は、従来の Bin 法に対応する。ただし、この定式化では、階段関数の線型結合で表される近似解と真の解との誤差を最小化するという数学的要請を課す点が従来の Bin 法と異なる。

また、 $N = 2$ にとり基底関数 $\{b_j\}_{j=1, 2}$ を log-normal や modified-Gamma といった代表的な関数に選べば、従来の Bulk 法に対応した定式化となる。この場合、Bulk 法との違いは、この定式化では二つの基底モード間の相互作用を表す係数 ((5) 式の p_{ij} および q_{jk}^i) が、パラメータ化ではなく連続的な基礎方程式 (1) から積分によって直接得られるところにある。これは、仮定した二つの基底モード (雲粒・雨粒に対応) の間の相互作用が、各モードの内部に含まれる様々なサイズの粒子間の相互作用を総合 (積分) した形で与えられる、という意味でも物理的に自然な定式化であると考えられる。言い換えれば、Bulk 法におけるパラメータ化に相当する式を、微物理の基礎方程式 (1) から系統的な数学的操作によって求めているとも言える。

これらのことから、前節の定式化は従来の Bin 法・Bulk 法を系統的に一般化した方法であると考えられる。

5 自由度の可変性

基底関数 $\{b_j(\eta)\}_{j=1, \dots, N}$ の個数 N は、粒径分布関数を表現するための自由度を表す。 N の値を変更することで、もとの問題 (1) を様々な次元の問題に置きかえることができる。したがって、計算機の能力と扱う現象の全体的な時空間スケールに応じて雲微物理過程の自由度を選択的に調節することができ、scale gap で隔てられた Bin 法と Bulk 法の間を scalable に行き来することが可能になると考えられる。

当日の発表では、自由度 N の値を変えたいいくつかの場合について、雲の粒径分布の時間発展の様子を計算した preliminary result について紹介する予定である。