

# 正二十面体格子を用いた全球非静力モデルの力学フレームワーク

富田 浩文<sup>†</sup>, 佐藤正樹, 後藤 浩二 (地球フロンティア研究システム)

236-0001 横浜市金沢区昭和町 3173-25

<sup>†</sup> E-mail: htomita@jamstec.go.jp

## 1 はじめに

ここ数年, 地球フロンティア研究システム/次世代気候モデル研究グループでは, 高解像度大気大循環モデルを用いた気候変動研究の為に, 新しいモデルの開発に取り組んでいる. 目標解像度は, 水平方向に 5km 以下, 鉛直方向に 100m 程度の解像度である. この新しいモデルでは, ダイナミカルコアフレームワークとして正二十面体測地線格子を採用する. この格子系は球面準一様格子の一つであり, 極問題を抜本的に回避する. これまで, 計算安定性および計算精度ついて, 高解像度時にも問題なく計算できることを示してきた [1]. また, 分散メモリー型の超並列計算機上での効率の良い計算の戦略も提案してきた (気象学会等). これらにより, 水平方向に関わる問題は概ね解決できた.

目標としている解像度がこのような高解像度であるため, また将来的には更に高解像度化するであろうことを踏まえ, 既存の全球モデルに用いられているプリミティブ方程式系ではなく非静力学方程式系を採用することにした. 我々は長時間の気候計算に耐え得るような非静力学モデルの計算スキームも同時に開発してきた [2]. 本講演では, これまで開発してきた計算上の技術をまとめながら, 本モデルの定式化と数値計算法について発表する.

## 2 支配方程式

以下の回転系での Euler 方程式から出発する.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho g \hat{\mathbf{k}} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (h \rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla p + Q, \quad (3)$$

ここで,  $\rho, \mathbf{v}, e, h, p$  は密度, 速度ベクトル, 内部エネルギー, エンタルピー, 圧力である.  $g, \boldsymbol{\Omega}, Q$  は, それぞれ, 重力加速度, 地球の角速度, 非断熱加熱率を表す.  $\hat{\mathbf{k}}$  は鉛直方向の単位ベクトルである. 運動方程式を鉛直方向と水平方向に分離するため, 空間微分演算子を以下のように書く. 勾配演算子は, 任意のスカラー  $\phi$  に対して,

$$\nabla \phi = \nabla_h \phi + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (4)$$

発散演算子は, 任意のベクトル  $\mathbf{u}$  に対して,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{1}{(a+z)^2} \frac{\partial}{\partial z} ((a+z)^2 u_z) \\ &= \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2u_z}{a+z}, \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, 第 3 項は十分に小さいとして,

$$\simeq \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (6)$$

とする. これらを使うと, 式 (1)~(3) は, 以下のように書くことができる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}_h) + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{G}_h = -\nabla_h p - \mathbf{C}_h, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + G_z = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - C_z, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla_h \cdot (h \rho \mathbf{v}_h) + \frac{\partial h \rho w}{\partial z} = \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h p + w \frac{\partial p}{\partial z} + Q \quad (10)$$

式 (8),(9) 中の移流項, コリオリ項は,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \nabla \cdot (v_1 \rho \mathbf{v}) \mathbf{e}_1 + \nabla \cdot (v_2 \rho \mathbf{v}) \mathbf{e}_2 + \nabla \cdot (v_3 \rho \mathbf{v}) \mathbf{e}_3 \\ &= \left[ \nabla_h \cdot (v_1 \rho \mathbf{v}_h) + \frac{\partial v_1 \rho w}{\partial z} \right] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left[ \nabla_h \cdot (v_2 \rho \mathbf{v}_h) + \frac{\partial v_2 \rho w}{\partial z} \right] \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left[ \nabla_h \cdot (v_3 \rho \mathbf{v}_h) + \frac{\partial v_3 \rho w}{\partial z} \right] \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = -2|\boldsymbol{\Omega}| \rho v_2 \mathbf{e}_1 + 2|\boldsymbol{\Omega}| \rho v_1 \mathbf{e}_2, \quad (12)$$

で表されるベクトル  $\mathbf{G}, \mathbf{C}$  の水平ベクトル成分及び鉛直成分である. ここで,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  は, 空間および時間に依存しないある一つの直交基底で,  $v_1, v_2, v_3$  はその基底に対する速度ベクトルの成分を表す. これらの成分は, スカラー量となることに注意されたい.

さて, ここで静止基本場を導入し, 圧力と密度について, 基本場からのズレを  $l$  を付けて表す. 更に, 以下の山岳に沿った座標系

$$\xi = \frac{z_T(z - z_s)}{z_T - z_s}, \quad (13)$$

を導入して ( $z_T$  はモデル上端の高度,  $z_s$  は地形の高度), 鉛直方向の座標を  $z$  から  $\xi$  に変換すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + \tilde{\nabla}_h \cdot (\mathbf{V}_h) \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{G}^z + \frac{W}{G^{1/2}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} + \tilde{\nabla}_h P + \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{G}^z P) = -\tilde{\mathbf{G}}_h - \tilde{\mathbf{C}}_h, \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{P}{G^{1/2}} \right) + Rg = \tilde{G}_z - \tilde{C}_z, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \tilde{\nabla}_h \cdot (h \mathbf{V}_h) \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ h \left( \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{G}^z + \frac{W}{G^{1/2}} \right) \right] \\ - \left[ \mathbf{V}_h \cdot \left( \tilde{\nabla}_h P + \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{G}^z P) \right) \right] \\ + w \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{P}{G^{1/2}} \right) + Rg \right) \\ + Wg = G^{1/2} \tilde{Q}, \end{aligned} \quad (17)$$

ここで,  $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{Q}$  は,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}} &= G^{1/2} \mathbf{G} \\ &= \tilde{\nabla}_h \cdot (v_1 \mathbf{V}_h) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ v_1 \left( \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{G}^z + \frac{W}{G^{1/2}} \right) \right] \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{\nabla}_h \cdot (v_2 \mathbf{V}_h) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ v_2 \left( \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{G}^z + \frac{W}{G^{1/2}} \right) \right] \mathbf{e}_2 \\
& + \tilde{\nabla}_h \cdot (v_3 \mathbf{V}_h) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ v_3 \left( \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{G}^z + \frac{W}{G^{1/2}} \right) \right] \mathbf{e}_3 \quad (18) \\
\tilde{\mathbf{C}} & = G^{1/2} \mathbf{C} \quad (19) \\
\tilde{Q} & = G^{1/2} Q \quad (20)
\end{aligned}$$

ここで、 $G^{1/2} \equiv (\partial z / \partial \xi)_h$ ,  $\mathbf{G}^z \equiv \nabla_h \xi$  である。各変数は、 $R = \rho' G^{1/2}$ ,  $P = p' G^{1/2}$ ,  $E = \rho G^{1/2} e$ ,  $\mathbf{V}_h = \rho G^{1/2} \mathbf{v}_h$ ,  $W = \rho G^{1/2} w$  である。式(14)~(17)の左辺は音波と重力波に関する「速い項」を、右辺はそれ以外の「遅い項」を表す。

### 3 数値計算法

水平方向の離散化は、図1(a)に示す正二十面体格子で行う。各変数の定義点はすべて三角形の頂点とする。これにより、六角形あるいは五角形のコントロールボリュームに基づく有限体積法で水平方向の微分演算子が評価できる。実際には、精度向上と計算安定性のため、定義点の位置をバネ格子で滑らかに分布させた後、コントロールボリュームの重心に移動させた修正格子を使う[1, 3]。

本モデルの時間積分法、鉛直離散化法[図.1(b)]は、[2]の方法に準じる。このスキームでは、質量および全エネルギーを保存させる。時間積分は、split explicit 法を用いる。すなわち、「遅い項」は2次のRunge-Kutta法を用い大きな時間刻幅で積分する。一方、「速い項」はEuler法で小さな時間刻幅で積分する。この小さな時間刻みのステップにおいて、以下のように水平陽解鉛直陰解法(HEVI法)を用いる。

1. 式(15)をEuler法で積分する。
2. 式(14), (16), (17)を使って  $W$  に関する Helmholtz 方程式を構築し、これにより  $W$  と  $R$  を解く。
3.  $E$  については、全エネルギーが保存するような補正を行う。具体的には、全エネルギーの発展方程式(フラックス形式)を解き、(運動エネルギー)+(ポテンシャルエネルギー)との差から内部エネルギー  $E$  を求める。

次に、運動方程式中の「遅い項」の評価であるが、移流項、コリオリ力ともに式(18),(19)を直接解く。特に、移流項の評価においては、式(18)のように3個のスカラー( $v_1, v_2, v_3$ )の移流を各成分に持つベクトルとして解くことになるので、極座標で方程式を書き下したときに通常無視されるメトリクス項も陰に含まれていることになる。この意味で、全く近似のない方法と言える。同様に、コリオリ力も近似せず解くので、鉛直方向の成分も含まれる。

紙面の都合上、計算は、一例だけを図2に示す。現実的な山を置き、全領域に Held-Suarez ダイナミカルコア実験[4]の平衡温度に40日で緩和するニュートン冷却を課し、数100日積分した。境界層では、Mellor & Yamada レベル2乱流モデルを実装し、地表面フラックスは、簡単なバルク法で模擬した。

### 4 結語

今後は、本ダイナミカルコアの信頼性を上げるため、様々なテスト実験を実施し、物理過程については、随時実装していく予定である。

また、本モデルは、もともと地球シミュレータのようなベクトル並列計算機を意識して設計コーディングされている。地球シミュレータで測定したベクトル化性能、並列化性能はいずれも十分なものとなっている。目標解像度で効率良く計算するには、更なるチューニングが必要である。

### 参考文献

- [1] H. Tomita, M. Tsugawa, M. Satoh, and K. Goto, "Shallow Water Model on a Modified Icosahedral Geodesic Grid by Using Spring Dynamics," *J. Comput. Phys.*, vol. 174, p. 579, 2001.
- [2] M. Satoh, "Conservative scheme for the compressible non-hydrostatic models with the horizontally explicit and vertically implicit time integration scheme," *Mon. Wea. Rev.*, vol. 130, p. 1227, 2002.
- [3] H. Tomita, M. Satoh, and K. Goto, "An Optimization of the Icosahedral Grid Modified by Spring Dynamics," *accepted in J. Comput. Phys.*, 2002.
- [4] I. M. Held and M. J. Suarez, "A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models," *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 73, p. 1825, 1994.

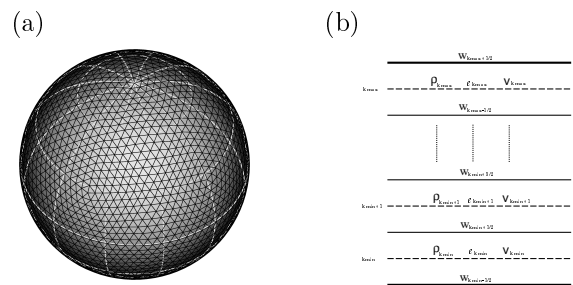


図1: (a) 正二十面体格子 (b) ローレンツ格子。

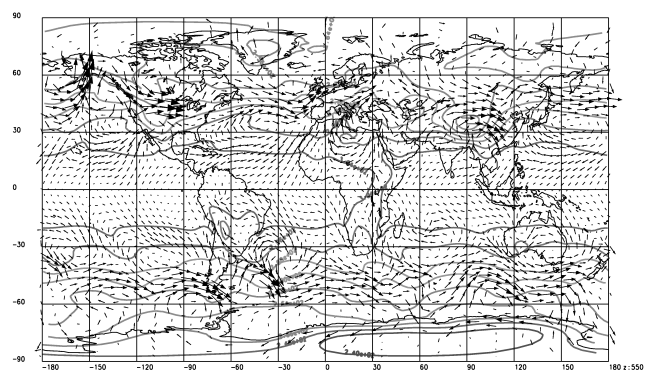


図2: 温度場と速度場のスナップショット ( $z = 550m$ )