非線形の水平対流の相似解とヒートアイランド循環の形態について

新野　宏 (東大海洋研)・森　厚 (東京学芸大)・里村雄彦 (京大院・理)・秋庭清香 (サントリー)

1. はじめに

ヒートアイランド（Heat Island；以下 HI と略）循環に関する理論的な研究は古くから行われてきた [1][2]。Kimura[3] は、定常な HI 循環の性質を、線形理論・室内実験・数値実験によって調べ、循環の形態には流れの非線形度に応じて、HI の両端寄りで上昇流が強いもの (以下 E 型と呼ぶ) と、HI の中心で強いもの (以下 C 型) の２通りがあることを示した (図 1)。秋庭 [4] は、Kimura[3] よりも幅広いパラメータ範囲における定常な HI 循環の形態を数値実験により調べ、同様の結果を得ている。しかしながら、循環がなぜ２つの形態を持つかは良く理解されていない。

最近、Mori and Niino[5](以下 MN) は、安定成層した流体の下部境界の半無限平面が冷却されたときに生ずる非線形水平対流の時間発展を理論的に調べ、その時間発展は、拡散、重力流、重力波の３つのレジームの遷移として生じ、各レジームは相似解を持つことを示した。本研究では、HI 循環の形態を支配する外部パラメータと物理的機構を MN の結果に基づいて理解することを試みたい。

2. 問題設定

2.1 基本方程式

水平方向に y 軸、鉛直方向に z 軸をとり、$z=0$ に位置する水平な下部境界の上に広がる半無限の 2 次元 Boussinesq 流体を考える。流体は鉛直温位傾度 $\Gamma(>0)$ で安定成層している。下部境界の $|x|<\ell$ の部分の温位は基本場の温位より $\Delta\theta$ だけ高く、$|x|>\ell$ の温位は基本場の温位に等しく保つときに生ずる HI 循環を考えるとき、この循環を支配する渦度方程式と熱力学の式は

$$\frac{\partial \xi_*}{\partial t_*} = -\frac{\partial \xi_*}{\partial y_*}\frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} + \frac{\partial \xi_*}{\partial z_*}\frac{\partial \psi_*}{\partial y_*} + \alpha g\frac{\partial \theta_*}{\partial y_*} + \nu\nabla_*^2\xi_* \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} = -\frac{\partial \theta_*}{\partial y_*}\frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} + \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*}\frac{\partial \psi_*}{\partial y_*} + \Gamma\frac{\partial \psi_*}{\partial y_*} + \kappa\nabla_*^2\theta_* \quad (2)$$

で与えられる。ここで、

$$(v_*, w_*) = \left(\frac{\partial \psi_*}{\partial z_*}, -\frac{\partial \psi_*}{\partial y_*}\right), \xi_* = -\nabla^2\psi_*. \quad (3)$$

であり、v_*、w_* は y_*、z_* 方向の流速、ψ_* は流線関数、ξ_* は渦度、θ_* は温位偏差、α は体膨張係数、g は重力加速度、ν は動粘性係数、κ は温度拡散係数である。速度場に対する境界条件は、下部境界 ($z=0$) で non-slip($v=w=0$) である。

2.2 無次元化と支配パラメータ

Kimura[3] は支配方程式 (1)(2) と境界条件を $(t_*, x_*, z_*, \psi_*, \xi_*, \theta_*) =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g\alpha\Gamma}}t, \ell\cdot y, \ell\cdot z, \frac{g\alpha\Delta\theta\ell}{\sqrt{g\alpha\Gamma}}\psi, \frac{g\alpha\Delta\theta}{\ell\sqrt{g\alpha\Gamma}}\xi\right) \quad (4)$$

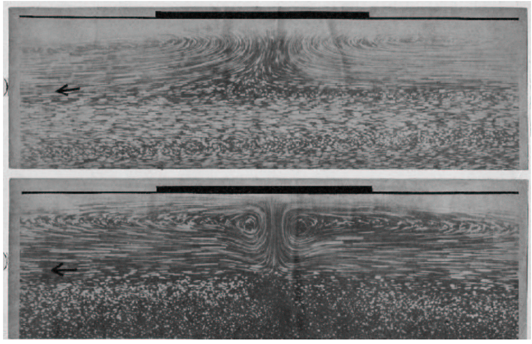

図 1: 粒子の運動で可視化した HI 循環の２つの形態（鉛直断面）[3]。実験は安定成層流体の上部境界面の一部を低い温度に保つ、上下逆の状況で行われた。上図は (5) 式で定義される非線形パラメータ ε_k が 0.34、下図は 0.90 の場合。

のように無次元化し、この問題が３つの無次元パラメータ

$$\varepsilon_k \equiv \frac{\Delta\theta}{\Gamma\ell} = \frac{\alpha g\Delta\theta}{\alpha g\Gamma}\frac{1}{\ell}, R_k \equiv \frac{\alpha g\Gamma\ell^4}{\kappa\nu}, Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}. \quad (5)$$

により支配されるとした。特に、特に HI 循環の形態は非線形度を表すパラメータ ε_k が小さいときには E 型、ε が大きいときには C 型となるとした（図 1）。

秋庭 [4] は数値実験により、様々な ε_k と R_k の組み合わせに対する上昇流最大の位置を調べ、E 型と C 型の遷移を生ずる ε_k の値は R_k の単調減少関数であることを見つけた。

ところで、HI 循環の鉛直スケール $\delta = {R_k}^{-1/6}\ell$ は、多くの場合その水平スケール（ℓ のオーダー）に較べて小さい ($R_k >> 1$ であるので)。そこで、静水圧近似と $\partial/\partial y << \partial/\partial z$ の近似のもとに支配方程式と境界条件を、$(t_*, x_*, z_*, \psi_*, \xi_*, \theta_*) =$

$$\left(\frac{\ell}{\delta\sqrt{g\alpha\Gamma}}\sqrt{\frac{\nu}{\kappa}}t, \ell\cdot y, \delta\cdot z, \frac{g\alpha\Delta\theta\delta}{\sqrt{g\alpha\Gamma}}\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}}\psi, \frac{g\alpha\Delta\theta}{\delta\sqrt{g\alpha\Gamma}}\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}}\xi\right) \quad (6)$$

のように無次元化すると、この問題の支配パラメータは１つ減り、

$$\varepsilon_n \equiv \frac{\Delta\theta}{\Gamma\delta} = \varepsilon_k{R_k}^{1/6}, Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}. \quad (7)$$

の２つだけとなる。従って、Pr が与えられたとき、E 型と C 型の遷移も含めた循環の形態は ε_n のみにより記述されると期待される（但し、HI での加熱が大きくなって、熱対流が発生する等、上の議論で考慮されていない場合は別である）。ε_n は、HI における加熱 $\Delta\theta$ を HI 循環の及ぶ高さまでの基本場の成層の温位差で割ったものであり、流れの非線形度の目安として適切と思われる。

MN によれば、ある時刻に差分加熱を始めたときに発達する水平対流は、拡散、重力流のレジームを経て、重力波レジームに遷移する。もし、HI

の水平スケール ℓ が小さければ、重力流は重力波のレジームに遷移する前に HI の中心に到達して C 型が実現し、一方 ℓ が大きければ、重力流が HI の中心に達する前に重力波レジームに遷移して E 型が実現するということは考えられないであろうか。実際、重力流の侵入距離 ℓ_c は $\sqrt{g\alpha\Delta\theta\sqrt{\kappa}}\cdot t^{5/4}$、重力波の侵入距離 ℓ_w は $N\sqrt{\kappa}\cdot t^{3/2}$ であるので [5]、これから両者が等しくなる時間 t を求め、ℓ_c が ℓ より大きいときには C 型になると考えると、$\varepsilon > O(1)$ という条件を得る。流速場の考察からも ε_n は非線形度を表すパラメータとして適当と思われる。

3. 数値計算と結果

前節の予想を確かめるために、(1)(2) 式を MN と同じ数値モデルを用いて解いた。独立な外部パラメータは 2 つなので、計算は様々な Γ と ℓ の値に対して行った。理論的な考察は無限の領域に対するものであるが、数値計算は水平方向に 3ℓ、鉛直方向に 10δ の大きさの箱に対して行った（この大きさであれば得られた循環の領域サイズに対する依存性は小さい）。ここで、下部境界の左端から ℓ の HI にあたる部分の温位偏差は $\Delta\theta$、残りの 2ℓ の部分は温位偏差なしとし、速度に対する境界条件は non-slip とした。側面・上部境界での境界条件は断熱で free-slip とした。これは、幅 2ℓ の HI が 6ℓ 毎に周期的に繰り返す状況に対応する。

最初に、ε_n の値は同じで、ε_k と R_k の値は大きく異なる数例について計算を行い、強さとスケールが全く異なる循環が、(6) によるスケーリング後はほぼ一致することを確かめた。これから、(6) のスケーリングと ε_n による現象の記述の有効性が確かめられた。但し、循環のアスペクト比 $\delta/\ell = {R_k}^{-1/6}$ があまり小さくないときには、HI の端付近の構造が水平方向の粘性効果によりやや平滑化される傾向が見られた。

図 2 は、計算から得られた循環の形態を非線形パラメータとアスペクト比の逆数の平面上にまとめたものである。横軸の $\varepsilon_n = 3.4$ 付近から右上に向かい、$\varepsilon_n = 3.6$ 付近で真上に伸びる破線の左側では E 型、右側では C 型となっている。また、図の右上の影をつけた領域では定常解が得られなかったが、その左側の領域では E 型が実現した。これから、おおまかに言えば、E 型は $\varepsilon_n < 3.2$ で実現し、C 型は $\varepsilon_n > 3.6$ かつ $\ell/\delta < 40$ のときに実現することがわかる。$\ell/\delta < 15$ のときに形態の遷移を起こす ε_n が ℓ/δ に弱い依存性を持つのは、アスペクト比が大きくなり、静水圧近似と水平微分を無視する近似が良くなくなるためである。

右上の不安定な領域は、熱対流の発生と何らかの関係があると思われる。熱対流の発生に関わるレーリー数 Ra を

$$Ra = \frac{g\alpha(\Delta\theta - c\delta\Gamma)\delta^3}{\kappa\nu} = (\varepsilon_n - c){R_k}^{1/3} \qquad (8)$$

で見積もるとき（ここで c は普遍定数)、$c \sim 3.2$、臨界レーリー数 $Rac \sim 600$ とすればある程度この

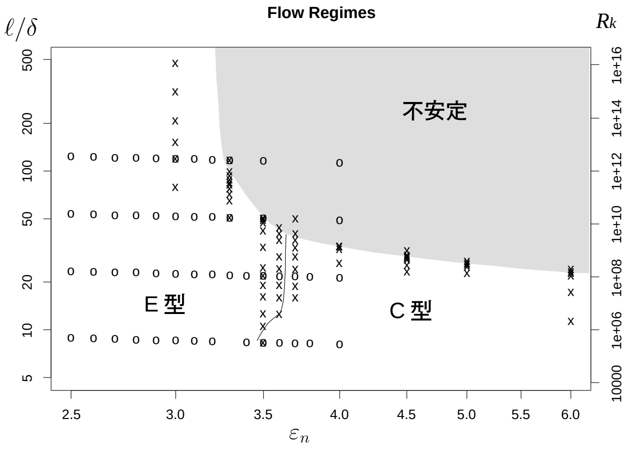

図 2: 様々な非線形パラメータ（ε_n）とアスペクト比の逆数（$\ell/\delta = {R_k}^{1/6}$）の組み合わせに対するヒートアイランド循環の形態。横軸の $\varepsilon_n = 3.4$ 付近から右上がりに立ち上がり、$\varepsilon_n = 3.6$ 付近で真上に伸びる破線は左側の E 型と右側の C 型を分ける境界線。右上の影は、計算が定常解に落ち着かない領域。○は初期値からの計算結果、×は ε_n が同じ値の別の計算結果を (6) によりスケール変換して初期値として用いた結果。

不安定領域の形の説明が可能なようにも思われる。しかしながら、数値計算の水平分解能はアスペクト比が 1 程度の熱対流セルを解像するのに十分ではなく、また計算事例毎にも異なっているので、なお検討が必要である。興味深いことに、定常解に落ち着いた事例の中にも、計算初期には対流セルの発生が見られたものが存在した。また、不安定擾乱の中には、必ずしも熱対流セルとは思われない構造を持つものも見られた。

4. まとめ

非線形なヒートアイランド循環に見られる、上昇流が島の中心で強いもの（C 型）と海岸付近で強いもの（E 型）の 2 つ形態 [3][4] は、非線形パラメータ $\varepsilon = \frac{\Delta\theta}{\Gamma}(\frac{g\alpha\Gamma}{\kappa\nu\ell^2})^{1/6}$ により主として記述され、大まかに言って C 型は ε が 3.6 より大きいときに現われることがわかった。この条件は MN が調べた非線形水平対流の時間発展において、重力流レジームが重力波レジームへ遷移する前にヒートアイランドの中心に達することができる条件と対応する。しかしながら、ε が 3.2 より大きく、$R_k \equiv \frac{\alpha g\Gamma\ell^4}{\kappa\nu}$ が大きな領域では、定常なヒートアイランド循環は得られない。これは、ヒートアイランドの上で熱対流が発生する条件と関係がありそうであり、今後その機構を検討していく必要がある。

参考文献

[1]Jeffreys, H., QJRMS, **48**, 29-46.
[2]Stommel H. & G. Veronis, 1975: Tellus, **9**, 401-407.
[3]Kimura, R., 1975: JMSJ, **53**, 440–457.
[4] 秋庭清香, 2002: 京都大学理学研究科地球惑星科学専攻修士論文, 47pp.
[5]Mori, A. & H. Niino, 2002: JAS, **59**, 1841–1856.