結合コンパクト差分を用いた
球面上の流体方程式の高速解法

*石井克哉・二瓶友典・赤堀浩司　（名大・工）

1. はじめに

Chu & Fan (1998) によって提案された結合コンパクト差分スキームは、微分を高精度で表現できる。差分法であるため計算量が少なく、現在気候モデルに広く使用されている、計算量の多いスペクトル法に替わる高速な解法として有望と思われる。我々は高精度なこの結合コンパクト差分スキームの高解像度化を行い、球面上での計算に現れる極問題に対しては空間差分フィルタの改良により安定性を改善した。この解法の有用性の検討のため、球面上の浅水方程式系に対する Williamson et al.(1992)の標準テスト問題を用いた。発表ではこの結果を中心に、より実用的な問題への応用を目指し、多層モデルなどにおける本解法の有用性についても検討する予定である。

2. 数値解法

2.1 結合コンパクト差分スキーム

i番目の格子点x_iにおけるある関数の値をf_i、その１階、２階、３階の導関数をf_i', f_i'', f_i'''とする。本研究での結合コンパクト差分において、これら導関数の値は、

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\vec{\mathbf{f}} \tag{1}$$

を解くことにより求められる。ここで、格子点の数をNとすると、

$$\vec{\mathbf{x}} = (f_1', f_1'', f_1''', f_2', f_2'', f_2''', \cdots, f_N', f_N'', f_N''')^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

であり、また$\mathbf{A}$はブロック３重対角行列となる。$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$をうまく選ぶことにより、１階微分について８次の精度を実現し、さらに差分の解像度を向上させている。これは隣接する９点の関数値を必要とする通常の８次精度差分に比べ、差分の解像度は格段に向上しており、また海洋のような境界のある問題に対しても有利となっている。このスキームにより微分を求めるために必要な計算量は、$O(N)$である。

2.2 空間差分フィルタ

緯度－経度格子を用いた球面上の計算においては極付近での格子点の集中のために計算が不安定になる。これを抑えるために Lele (1992) の提案する空間差分フィルタを用いた。フィルタリング後の値$\vec{\mathbf{y}} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_N)^{\mathrm{T}}$は、

$$\mathbf{C}\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\vec{\mathbf{f}} \tag{3}$$

を解くことにより得られる。ここで$\mathbf{C}$は５重対角行列である。$\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$は Lele と異なる方法で選び、緯度に応じてフィルタ特性を変化させている。このフィルタリングに必要な計算量も$O(N)$である。

2.3　計算手順

計算格子として、Fornberg (1995) の提案する緯度－経度格子を用いた。これは等間隔格子であるが、緯度方向に格子間隔の半分だけずらすことにより、格子点が極点を避けるように配置されている。また、この格子では緯度、経度の両方向に対して周期境界条件が適用できる。浅水方程式に現れる各物理量の緯度、経度方向の微分を８次の結合コンパクト差分スキームにより求め、時間積分は４次のルンゲ・クッタ法により行った。この解法により１タイムステップあたりに必要な計算量は、緯度、経度各方向の格子点数を M とすると $O(M^2)$ であり、球面調和関数を用いたスペクトル法の $O(M^3)$ に比べ高速である。

3.　結果とまとめ

図 1 に現実の大気の観測値を初期条件としたテストケース７を本解法により分解能 128 ×64 で計算した結果および高分解能（T341）スペクトル法モデル ispack（石岡 1999）による結果を示した。大規模パターンの両者の一致は良好であり、本解法の精度の高さを示している。非静力学数値モデルを含む高分解能全球モデルを考える場合、計算量の増加の度合いの小さい本解法が有望であると思われる。

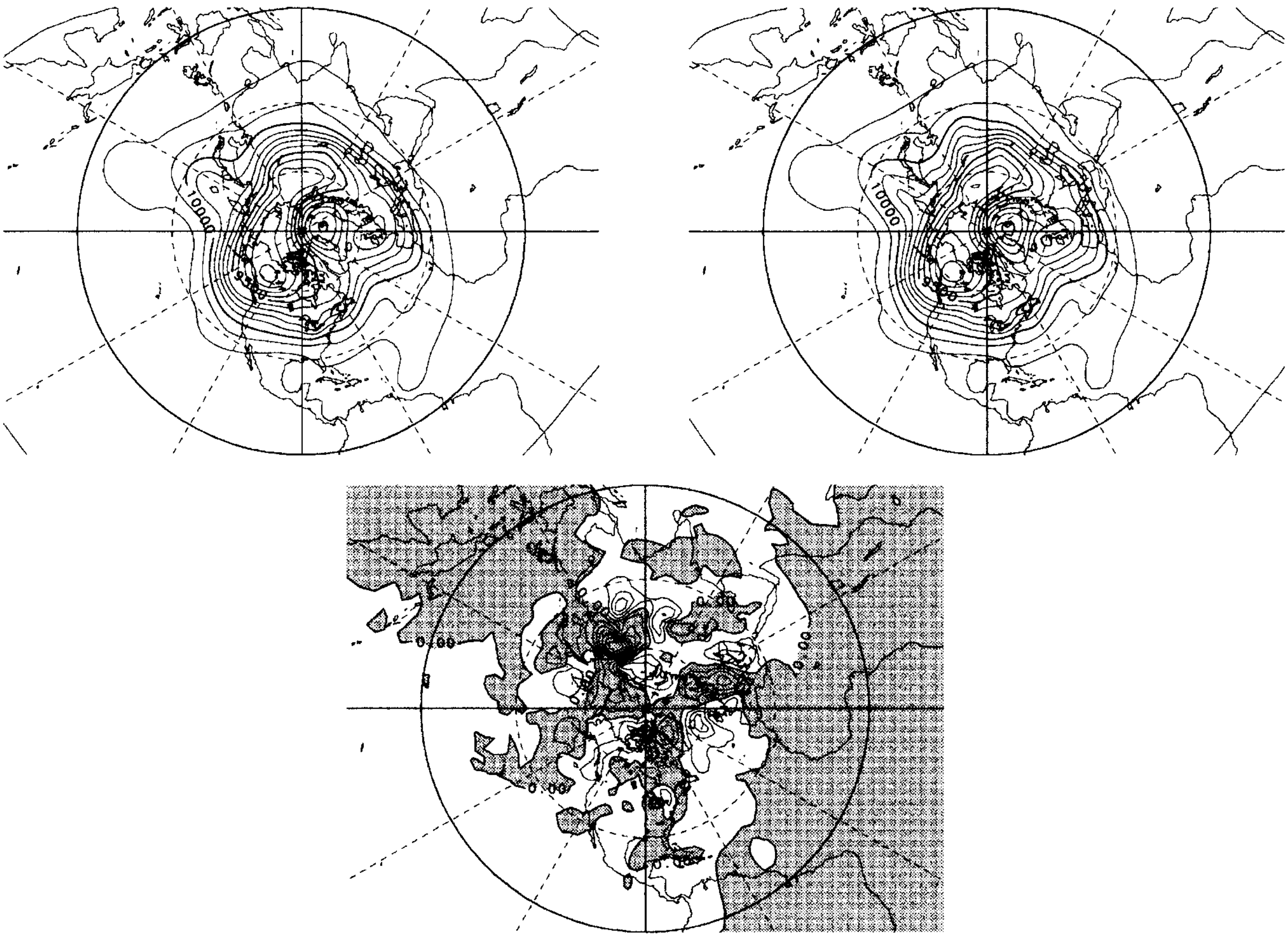

図１ Williamson test case 7 (0000 GMT December 21,1978) の結合コンパクト差分法（左上）およびスペクトル法（右上）による結果。５日後の流体表面の等高線を示している。等高線の間隔は 100m。（下）は両者の差。陰は負の領域を表す。等高線の間隔は 25m。