

保存則を満たす非静力学モデルの差分スキーム

佐藤 正樹 (地球フロンティア研究システム/埼玉工業大学)

1. はじめに

地球フロンティアでは、地球シミュレータ等の超並列計算機上で動作させることを念頭に、全球を 5km 程度の格子で覆う次世代大気大循環モデルを開発中である。本モデルは、気候シミュレーションを目的とするため、長時間積分において物理量が保存することが必要となる。次世代モデルの力学フレームとしては、完全圧縮性の非静力学方程式系を採用する。すなわち、3 次元的な音波の伝播を含む Euler 方程式と同等な方程式系である。非静力学モデルにおける音波の解法には、並列計算の効率性から、水平方向には陽解法、鉛直方向には陰解法を用いることを考えている (HE-VI 法)。ところが、従来の HE-VI 法では、質量やエネルギーの保存性は満足されるものではなかった^{1),2)}。そこで本研究では、HE-VI 法において質量およびエネルギーを保存するスキームの導出を試みる。

2. スキームの概要

われわれは全球を覆う非静力学モデルの開発を目指している。本講演では、球面効果・潤滑効果を考慮しない直方体領域の乾燥大気モデルの枠組みの中での新スキームについて述べることにする。

本スキームの特徴は次の通りである: 1. 密度、運動量、エネルギーをフラックス型で定式化し、領域積分の保存性を保証する。2. 鉛直伝播する音波だけでなく、重力波についても陰的に扱い、鉛直伝播に対する時間ステップに制約がない。3. 圧力ではなく、鉛直速度について鉛直方向の Helmholtz 方程式を解く形に定式化する。これによって、静力学モデルとの切り替えをスイッチングできることになる。4. 内部エネルギーと運動エネルギーの和を時間積分することで、全エネルギーの完全な保存性を確保する。

さらに、本稿では詳細に触れないが、次のような手法を導入する: 5. エネルギーの移流項の差分化を工夫し、領域積分したエントロピー、温位の保存性を確保する³⁾。6. 音波、重力波に関する項とそれ以外の項を異なる時間間隔で積分する time splitting 法を導入する。特に、small step では large step の場を基本場として扱い、large step からのずれの部分のみについて計算を行う⁴⁾。

3. 基礎方程式と差分化

簡単のために、水平 x 、高度 z の 2 次元面内で定式化を行う。静水圧平衡している適当な基本場からの圧力、密度のずれを p' 、 ρ' とすると、保存型での方程式系は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial p'}{\partial x} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} u) + F_x, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} w) + F_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} h) - u \frac{\partial p}{\partial x} - w \frac{\partial p}{\partial z} = Q. \quad (4)$$

c は内部エネルギー、 $h = c + p/\rho$ はエンタルピー、 F_x 、 F_z は摩擦項である。成層大気中を鉛直伝播する音波の分散関係・安定性解析をもとに、時間離散化を考える。 $U = \rho u$ 、 $W = \rho w$ 、 $P = p'$ 、 $R = \rho'$ 、 $\mathcal{E} = \rho c$ とおき、(2)、(3) 式の

右辺を G_x 、 G_z とおくと、

$$\delta_t R + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)^{n+1} = 0, \quad (5)$$

$$\delta_t U + \frac{\partial}{\partial x} P^n = G_x^n, \quad (6)$$

$$\delta_t W + \frac{\partial}{\partial z} P^{n+1} + R^{n+1} g = G_z^n, \quad (7)$$

$$\delta_t \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial x} (h^n U^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^n W^{n+1}) - \bar{u} \frac{\partial P^n}{\partial x} - \bar{w} \left(\frac{\partial P^n}{\partial z} + R^{n+1} g \right) + W^{n+1} g = Q^n. \quad (8)$$

ここで、時刻 n 、 $n+1$ ステップ目を A^n 、 A^{n+1} で表し、 $\delta_t A = (A^{n+1} - A^n)/\Delta t$ 、 $\bar{A} = (A^{n+1} + A^n)/2$ とした。(8) 式の左辺は運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーとの変換性を考慮した差分化である。

(5) ~ (8) 式は 2 段階に分けて計算される。はじめに、(6) 式によって U^{n+1} が求まる。残りは、 R^{n+1} 、 W^{n+1} 、 P^{n+1} 、 \mathcal{E}^{n+1} についての式となるが、理想気体の場合、

$$\mathcal{E} = \rho c = C_v \rho T = \frac{C_v}{R_d} p. \quad (9)$$

であることを用いると、(8) 式は、

$$\delta_t P + \frac{\partial}{\partial z} (c_s^2 W^{n+1}) + \frac{R_d}{C_v} \dot{g} W^{n+1} = \frac{R_d}{C_v} G_{\mathcal{E}}^n, \quad (10)$$

と表される。ここで、 \dot{g} は $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ に相当し、静力学平衡が成立する場合には重力加速度 g と一致する。 $c_s^2 = \frac{R_d}{C_v} h^n$ であり、音速に相当する。また、 $G_{\mathcal{E}}$ は (8) 式の残りの項である。

(5)、(7)、(10) 式は、 W^{n+1} 、 P^{n+1} 、 R^{n+1} についての連立方程式となる。これを W^{n+1} について解く形に変形する。ただし、(8) 式によれば、 \dot{g} には $n+1$ ステップの値を含んでいるのでこのままでは解けない。そこで、 W を求める段階では、 n ステップ目の値で評価しておく:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Delta t^2 c_s^2 W^{n+1}) - \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta t^2 \frac{R_d}{C_v} \dot{g} W^{n+1} \right) \right. \\ & \left. + \Delta t^2 g \frac{\partial}{\partial z} W^{n+1} \right] + \alpha W^{n+1} \\ & = \alpha W^n + \alpha \Delta t G_z^n - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left(P^n + \Delta t \frac{R_d}{C_v} G_{\mathcal{E}}^n \right) \\ & - \Delta t g \left(R^n - \Delta t \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

ここで α は静力学スイッチであり、 $\alpha = 0$ とすれば静力学方程式系に帰着する。これを鉛直離散化すれば、ベクトル W^{n+1} の係数が 3 重対角行列となり、容易に解くことができる。上下の境界における W^{n+1} の値は、境界条件により直接指定される。この式から求めた W^{n+1} を (5) 式に代入して R^{n+1} を求めると、密度が保存する。

一方、エネルギーの積分では、(8) 式に戻って積分すると全エネルギーが保存される。(10) 式と (8) 式では、 \dot{g} の

値に不整合があるが、ある意味でイタレーション的にエネルギーを求めていることになる。音波に関しては、安定性のみが重要で精度は必要ないから、計算が安定である限りイタレーションは高々1回で十分である。

この考えを進めれば、エネルギーの算出の段階で、新たに内部エネルギーと運動エネルギーの和を時間発展させれば、差分の計算によけいな時間をとられなくてすむ。すなわち、運動エネルギー $K = \rho \frac{v^2}{2}$ の $n+1$ での値は既知だから、(8) 式の代りに、

$$\begin{aligned} \delta_t(E + K) + \nabla \cdot \left[\mathbf{V}^{n+1} \left(h + \frac{v^2}{2} \right)^n \right] \\ = -W^{n+1}g - \nabla \cdot \mathbf{q}^n + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma'_{ij})^n \end{aligned} \quad (12)$$

を用いてエネルギー E を求めることができる。 \mathbf{q} は熱フラックス、 σ' はストレステンソルであり、これらもフラックス型で差分化できる。

4. 計算例

本スキームでは、音波・重力波についての時間積分幅は水平格子幅のみによって規定され、鉛直格子幅には規定されない。鉛直伝播する音波の実験によって、このことは確認できる(図省略)。エネルギーの保存性を見るために、Straka et al.⁵⁾ の cold bubble のベンチマーク実験を用いる。中立成層の初期場の高度 3km の位置に -15K の温度擾乱 (cold bubble) を与える。ここではエネルギーの保存性を見るために、格子間隔は 50m とし、時間ステップを 0.1 s とした。図1は時刻 $t = 0, 450, 900$ s の温位の分布を示す。cold bubble が落下し、地面に沿って重力流が広がっている。この結果は、Straka et al の同程度の分解能実験と比べても遜色はない。図2は(12)式を用いて積分した場合のエネルギーの時間変化をである。ただし、格子間隔 200m の実験結果である。内部エネルギーとポテンシャルエネルギーとの和 $\rho(e + \Phi)$ は減少し、その分だけ運動エネルギーが生成される。両者の変化量はほぼ完全に相殺し、全エネルギーが保存していることが確認される。なお、エネルギーを(8)式を使って積分した場合には、 $t = 900\text{s}$ において約 5J m^{-3} の誤差が生じた。

5. 結論

フラックス型をもとにした保存則を満たす非静力学方程式系の計算スキームを新たに開発した。音波・重力波に関する鉛直陰解法、time splitting 法の導入により、計算効率を高めることができる。cold bubble による重力流の実験を行った結果、全エネルギーの保存性が確認できた。Taylor³⁾ の補間方法に従えば、さらにエントロピー、温位の領域積分が保存させることができる。問題は、エネルギーの鉛直移流が2次精度に止まることであり、特に、温位のラグランジュ的な保存性は保証されない。semi-Lagrange 法との hybrid 化が課題である。

引用文献

- 1) J. Dudhia: *Mon. Wea. Rev.* 121 (1993) 1493-1513.
- 2) G. Doms and U. Schaeffler, *Deutscher Wetterdienst* (1997) 155pp.
- 3) K.E. Taylor: *Mon. Wea. Rev.* 112 (1984) 1398-1402.
- 4) J. B. Klemp, W. C. Skamarock and J. Dudhia: http://wrf-model.org/WG1/wg1_main.html (2000).

- 5) J. M. Straka et al., *Int. J. Num. Methods Fluids*, 17 (1993) 1-22.

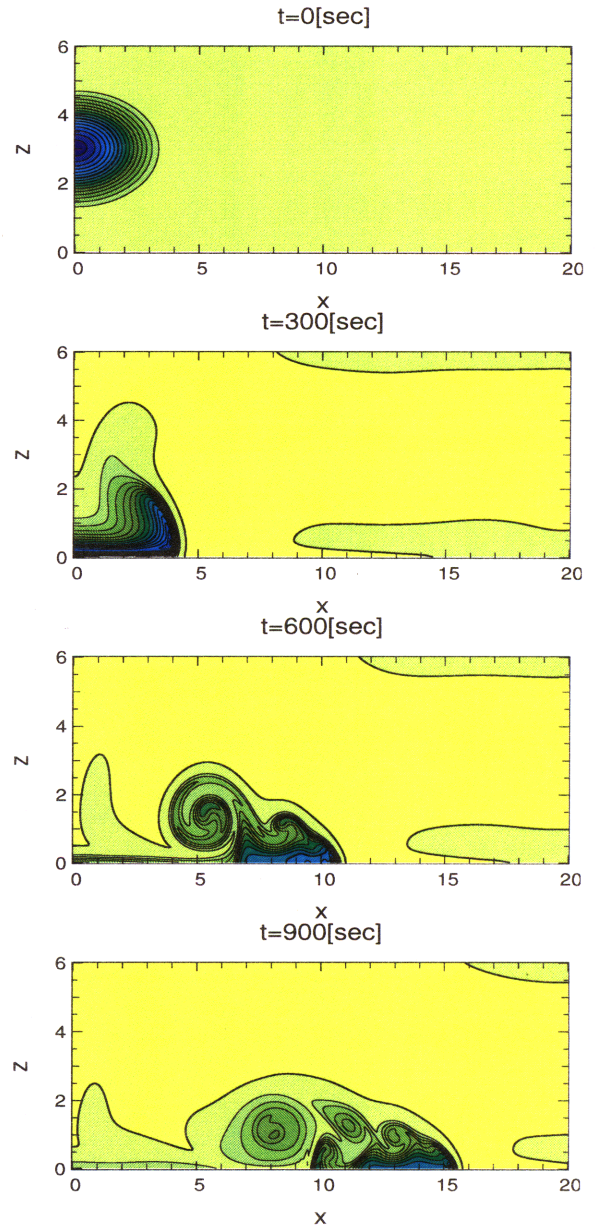


Fig.1 cold bubble 実験における温位分布。格子間隔 50m。時刻 $t = 0, 300, 600, 900$ s。等値線間隔 1K。

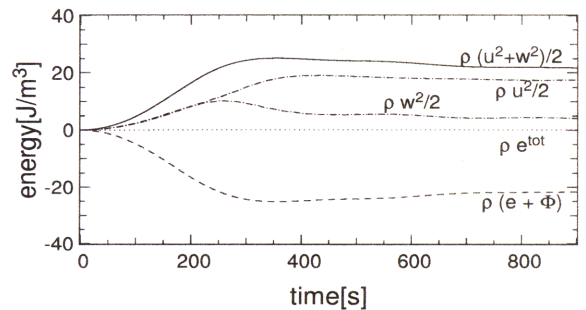


Fig.2 cold bubble 実験における体積平均エネルギーの時間変化。 $\rho(u^2 + w^2)/2$ は運動エネルギー、 $\rho(e + \Phi)$ は有効位置エネルギー、 ρe^{tot} は全エネルギー。