

成層乱流のラーズ・エディ・シミュレーションとサブグリッド・モデリング

*吉田恭・石原卓・金田行雄 (名大・工)

1. はじめに

大気や海洋の数値シミュレーションで、サブグリッドの乱れた流れは直接計算されず、何らかの形でモデル化される。サブグリッドスケールの乱流のグリッドスケールより大きな流れの力学への寄与は、その乱流の統計的性質に依存している。したがって、モデル化のためには、サブグリッドスケールの乱流の統計的性質を調べることが重要となる。

一般に十分発達した乱流は、小スケールでは統計的に一様等方的でかつ普遍的な統計法則が成立するであろう、と考えられている。しかし、現時点での大気や海洋の流れのシミュレーションのグリッドスケールでは、特に密度成層の効果が強く、サブグリッドスケールの乱流も統計的に非等方的である。海洋乱流の場合、成層の時間スケールと乱流の時間スケールの釣合うスケールは $O(10^0)$ [m] と、見積もられており、それ以上のスケールでは成層の効果が強くなる。ところが、そのようなスケール ($O(10^0) \sim O(10^3)$ [m]) でも、海域によって境界条件、外力も様々であるにも関わらず、速度変動のエネルギー・スペクトルが一定の形状 (Garret-Munk スペクトル) をとることが海洋観測から示されている。しかし、この経験的な普遍平衡スペクトルの実現するメカニズムは未だ明らかになっていない。このメカニズムが解明されれば、このスケール領域の乱流をモデル化するための知見が得られる、と期待される。

本研究では、海洋乱流の小スケール ($O(10^0) \sim O(10^2)$ [m]) 領域の成層度に対応する、一様密度成層乱流のスペクトル・ラーズ・エディ・シミュレーション (LES) を行い、そのエネルギー・スペクトルなどの統計量の解析、海洋観測データとの比較を行った。また、このスケールの乱流がより大きなスケールの流れに及ぼす影響を、渦粘性、渦拡散の形で予備的に見積もった。

2. モデル

本研究では、一様平均密度勾配 $\partial\rho_0/\partial z$ の下の非圧縮 Boussinesque 方程式に、スペクトル渦粘性、渦拡散を付加した LES モデルの数値シミュレーションをスペクトル法で行った。計算領域は周期境界条件の立方体で、計算格子点数は 512^3 である。渦粘性と渦拡散は、カットオフ波数 k_c 以上の波数領域では、流れはほぼ一様等方性乱流であり、かつ Kolmogorov のエネルギー・スペクトル

$E(k) = C_{kol}\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ (C_{kol} は Kolmogorov 定数、 ϵ はエネルギー散逸率) が実現していると仮定して、ラグランジュ繰り込み近似 (LRA) 理論 [2] を用いて、見積もられた。渦粘性と渦拡散は波数ベクトル空間の表現で

$$\begin{aligned}\nu^e(\mathbf{k}) &= C_{kol}^{1/2}\epsilon^{1/3}k_c^{-4/3}f(k/k_c) \\ \kappa^e(\mathbf{k}) &= C_{kol}^{1/2}\epsilon^{1/3}k_c^{-4/3}g(k/k_c)\end{aligned}$$

で与えられる。ここで f と g は LRA 理論より求められる普遍的な関数である。

また、統計的準定常状態を得るために、外力と密度揺らぎの源をエネルギー保有波数領域に負の摩擦の形で、系全体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定になるように与えた。

3. 計算結果

3.1 スペクトル、エネルギー密度の分布

海洋観測では、例えば Gargett[1] らにより速度水平成分の鉛直シアースペクトルが測定されており、鉛直波数 k_v が浮力波数 $k_b = N^{3/2}\epsilon^{-1/2}$ 付近を境にそのスケール則が変化することが知られている。図 1 はいくつかの N について、シミュレーションの準定常状態におけるシアースペクトル

$$\begin{aligned}\Psi(k_v)\Delta k_v &= \\ \sum_{k_v - \Delta k_v/2 \leq p_v < k_v + \Delta k_v/2} p_v^2 [|\hat{u}_1(\mathbf{p})|^2 + |\hat{u}_2(\mathbf{p})|^2]\end{aligned}$$

を表示したものである。ここで $\hat{u}_i(\mathbf{p})$ は速度場のフーリエ成分である。両軸の波数とスペクトルは、それぞれ ϵ と N を用いた単位 k_b と $\Psi_b = \epsilon^{1/2}N^{1/2}$ で規格化されている。 N の異なるシミュレーションのスペクトルを並べると、 $(k_v/k_b) \simeq 1$ でその勾配が変化していて、海洋観測の結果と対応している。 $(k_v/k_b) > 1$ では Kolmogorov スペクトルに対応する $\Psi(k_v) \propto k_v^{1/3}$ にほぼ従い、この波数領域では近似的に等方性乱流とみなせることが期待される。一方、成層効果の効く $10^{-1} < (k_v/k_b) < 1$ の波数領域については、ほぼ $\Psi(k_v) \propto k_v^{-1/3}$ であるが、これは観測データ結果 $\Psi(k_v) \propto k_v^{-1}$ と比べると勾配がやや緩やかである。

計算機シミュレーションでは、観測と比べてより詳細なデータを得られる利点があり、1 次元スペクトルのみ

らず、波数ベクトル空間上でのエネルギー密度の分布を解析することが可能である。各波数ベクトル \mathbf{k} には、非圧縮速度場の Craya-Herring 分解による 2 つのモード：成層の影響を直接受ける「渦」モードと非線形項を通して間接的にしか受けない「波」モード、そして密度揺らぎのモードの 3 つのモードがある。シミュレーションの準定常状態における $k > k_b$ の各成分のエネルギー密度は、鉛直軸 ($k_h = 0$) 付近に集中している、非等方的である。ここで k_h, k_v はそれぞれ水平、垂直波数を表す。興味深いのは、成層の影響を直接は受けない「渦」モードのエネルギー密度の分布も強く非等方化している点である。また、全ての成分の波数空間鉛直軸、水平軸上のエネルギー密度分布について、それぞれほぼ $k_v^{-17/3}, k_h^{-8/3}$ のスケール則が見られた。このスケール則の理論解析については、現在検討中である。

3.2 粗いグリッドのための渦粘性、渦拡散

本研究の LES では、サブグリッドスケールの等方性乱流を仮定するので、 $k_c > \sim k_b$ の制約があり、Garret-Munk スペクトルで定数シアースペクトルが現れる波数領域 $k \sim O(10^{-2})$ [cpm] までは十分シミュレーションできていない。実用的な海洋モデルでは、もっと大きなスケールの流れを解くため、グリッドをもっと粗く切る必要がある、つまり k_c が小さくなる。その場合、 $k > k_c$ の領域でも成層の影響は強く、等方性乱流は仮定できない。成層乱流の普遍的スペクトルが明らかになり、そのメカニズムが理解されれば、粗いグリッドのサブグリッド・モデルが可能となろう。そのための第一歩として、シミュレーションの k_c よりも小さな仮想的カットオフ波数 k'_c を設けて、そのサブグリッド ($k \geq k'_c$) の寄与をシミュレーションで得られた場のデータから見積りを試みた。

いま、 $\hat{u}_4 = \hat{\rho}/N$ と置く。一般に 2 次相関 $Q_{ij}(\mathbf{k}) =$

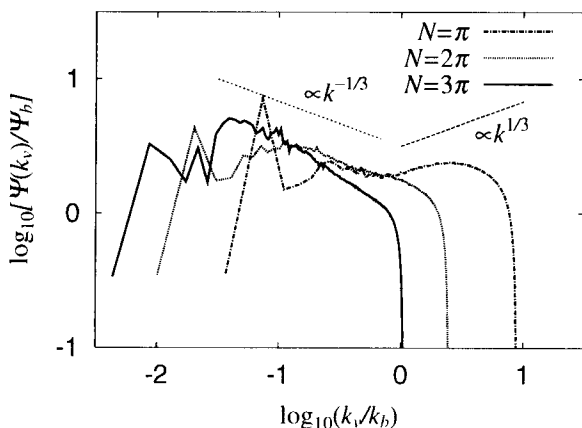


図 1: 成層乱流の LES における準定常状態のエネルギースペクトル。

$(\hat{u}_i(\mathbf{k})\hat{u}_j^*(\mathbf{k})), (i, j = 1, 2, 3, 4)$, の時間発展について、波数が k'_c 以上のモードが関与する部分を $S_{ij}^>(\mathbf{k})$ とおけば、渦粘性、渦拡散は

$$S_{ij}^>(\mathbf{k}) = 2\nu_{ijlm}^e(\mathbf{k})Q_{lm}(\mathbf{k}) \quad (1)$$

を満たす 4 階のテンソル $\nu_{ijlm}^e(\mathbf{k})$ で定義される。 $\nu_{ijlm}^e(\mathbf{k})$ の形についてある単純化の仮定を用いて、データから得られる $S_{ij}^>(\mathbf{k}), Q_{lm}(\mathbf{k})$ から渦粘性、渦拡散を予備的に計算したところ、 $k'_c = 0.07k_b$ の場合、水平拡散に比べて鉛直拡散が著しく抑えられていることが分かった。浮力波数を海洋観測で得られた値 $k_b \simeq 1$ [cpm] ([1] 参照) とすれば、 $k'_c = 0.07$ は格子幅を $\Delta x \sim 7$ [m] にしたことに対応する。 $S_{ij}^>(\mathbf{k})$ のデータは、シミュレーションを実行した時間で平均をとっても、 \mathbf{k} に関して十分滑らかではなく、渦粘性、渦拡散の定量的評価は難しく、これは今後の課題である。

4. おわりに

シミュレーションのシアースペクトルは、海洋観測によるものと定性的に類似している。しかし $k < k_b$ での勾配はそれと比べて緩やかである。この違いは、例えばシミュレーションの外力の入れ方に起因するとも考えられるが、この点についてはさらなる検証が必要である。また、シミュレーションのスケール領域は、Garret-Munk の定数シアースペクトル領域のスケール ($O(10^1) \sim O(10^3)$ [m]) に十分届いてはいない。

シミュレーションのデータから、粗いグリッド (7m 程度) のための渦粘性と渦拡散の見積りを試みて、定性的に鉛直方向の粘性係数と拡散係数が水平方向に比べて抑えられることが確認された。この見積りは、更に粗いグリッドについても行われるべきだろう。

本研究では、格子点数 512^3 で、海洋の小スケール対応する成層乱流のシミュレーションを行ったが、上述の観測データとの比較、粗いグリッドのためのモデリングの観点から、もっと大きいスケールに対応する大規模なシミュレーションを行うことが、望ましい。今後の計算機能力の向上で、それが可能になることが期待される。

5. 謝辞

本研究は日本学術振興会未来開拓事業プロジェクト JSPS-RFTF97P01101 の援助のもとで行われた。

* 参考文献

- [1] Gargett, A.E. *et al.*, J. Phys. Oceanogr., **11** (1981) 1258-1271.
- [2] Kaneda, Y., J. Fluid Mech., **107** (1981) 131-145.