

Rossby波によるエネルギーfluxの全球シームレス解析に向けて

相木秀則 (Hidenori Aiki) JAMSTEC-APL

科学研究費基盤A 等温位/等密度座標に基づく大気/海洋大循環の解析 (H27-H31: 15H02129)

第1回打ち合わせ 東北大学 物理A棟A0509号室 2015年6月9日(火)–6月10日(水)

過去20年間の研究: エネルギー変換率の全球分布の診断

- どこで渦が発達するのか?
- どこで渦が減衰するのか?

これからの研究: エネルギーフラックスの全球分布の診断

- 平均流による移流, 各種ロスピ一波の内訳(惑星 β , シア β , 層厚 β)の理解
- どこからどこへ「何が」エネルギーを運ぶのか?

Chang and Orlanski (1994)

- 圧力flux+回転成分 (赤道域に拡張できない)
- 惑星 β 効果以外にも, シア β 効果や層厚 β 効果を加味する必要がある

本研究の方針

- Impulse-bolus擬運動量の保存式(この部分をこれから説明します)に隠された妙薬を応用して, 全緯度帯に適用可能な波のエネルギー方程式を構築(各種赤道波の解析解を用いて検証済)

全ての緯度帯の波を対象としたEliassen-Palm理論と渦度力学

相木秀則（海洋研究開発機構），高谷康太郎（京都産業大学），Richard J. Greatbatch（Univ. Kiel）

Aiki, H., K. Takaya and R. J. Greatbatch, 2015:

*A divergence-form wave-induced pressure inherent in the extension of
the Eliassen-Palm theory to a three-dimensional framework
for all waves at all latitudes,*

Journal of the Atmospheric Sciences, 72, 2822-2849

<http://dx.doi.org/10.1175/JAS-D-14-0172.1>

全ての緯度帯の波を対象としたEliassen-Palm理論と渦度力学

各種赤道波、中緯度惑星波、慣性重力波

Eliassen & Palm (1960)

- 山岳波(非静力重力波と中緯度惑星波の両方)
- 東西平均→鉛直2次元
- 波によるエネルギーfluxと運動量伝達を関係づける試み

Andrews & McIntyre (1976, JAS)

- 準地衡近似に焼き直し(中緯度惑星波に限定)
- 東西平均→鉛直2次元
- 4つの要素

[EP1] Taylor-Brethertonの恒等式(渦位の南北fluxの別表現診断式)

[EP2] Eliassen-Palmの関係式(擬運動量の予報保存式: fluxが群速度の向き)

[EP3] TEM (transformed Eulerian mean)運動量方程式

[EP4] MEM (merged Eulerian mean)運動量方程式 (非加速定理によく使われる…)

$$Q^\dagger = \psi_{xx} + \psi_{yy} + (\psi_z f_0^2 / N^2)_z$$

$$(\partial_t + \bar{u} \partial_x) [\underbrace{\psi_{xx} + \psi_{yy} + (\psi_z f_0^2 / N^2)_z}_{Q^\dagger}] + \psi_x (\beta - \bar{u}_{yy}) = 0$$

東西平均からのずれ

$$A^\dagger = A - \bar{\bar{A}}$$

$$\nabla_{yz} = \langle\!\langle \partial_y, \partial_z \rangle\!\rangle$$

[EP1] Taylor–Brethertonの恒等式(渦位の南北フラックスの別表現診断式)

$$\overline{\overline{Q^\dagger \psi_x}} = -\nabla_{yz} \cdot \langle\!\langle \underbrace{-\overline{\overline{\psi_x \psi_y}}}_{\overline{v^g u^g}}, \underbrace{-\overline{\overline{\psi_z \psi_x}} f_0^2 / N^2}_{-f_0 \overline{v^g \rho^\dagger} / \bar{\rho}_z} \rangle\!\rangle$$

[EP2] Eliassen–Palmの関係式(擬運動量の予報保存式: フラックスが群速度の向き)

$$\partial_t [\underbrace{(1/2) \overline{\overline{Q^\dagger}^2}}_{E/C_p^x} / (\bar{u}_{yy} - \beta)] + \nabla_{yz} \cdot \langle\!\langle \underbrace{-\overline{\overline{\psi_x \psi_y}}}_{C_g^y(E/C_p^x)}, \underbrace{-\overline{\overline{\psi_z \psi_x}} f_0^2 / N^2}_{C_g^z(E/C_p^x)} \rangle\!\rangle = 0$$

モデル解析に適した表現になっている
(Fourier解析をして群速度を求めなくて済む)

全ての緯度帯の線形中立波の支配方程式(高さ座標系における時間平均から)のそれ)

$$u'_t - (f_0 + \beta y)v' = -p'_x,$$

$$v'_t + (f_0 + \beta y)u' = -p'_y,$$

$$\rho'_t + w'\bar{\rho}_z = 0,$$

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0,$$

$$\langle\!\langle u', v', w' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \xi'_t, \eta'_t, \zeta'_t \rangle\!\rangle,$$

$$A' = A - \bar{A}$$

$$\nabla = \langle\!\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle\!\rangle$$

$$\zeta' \equiv -\rho'/\bar{\rho}_z = -p'_z/N^2,$$

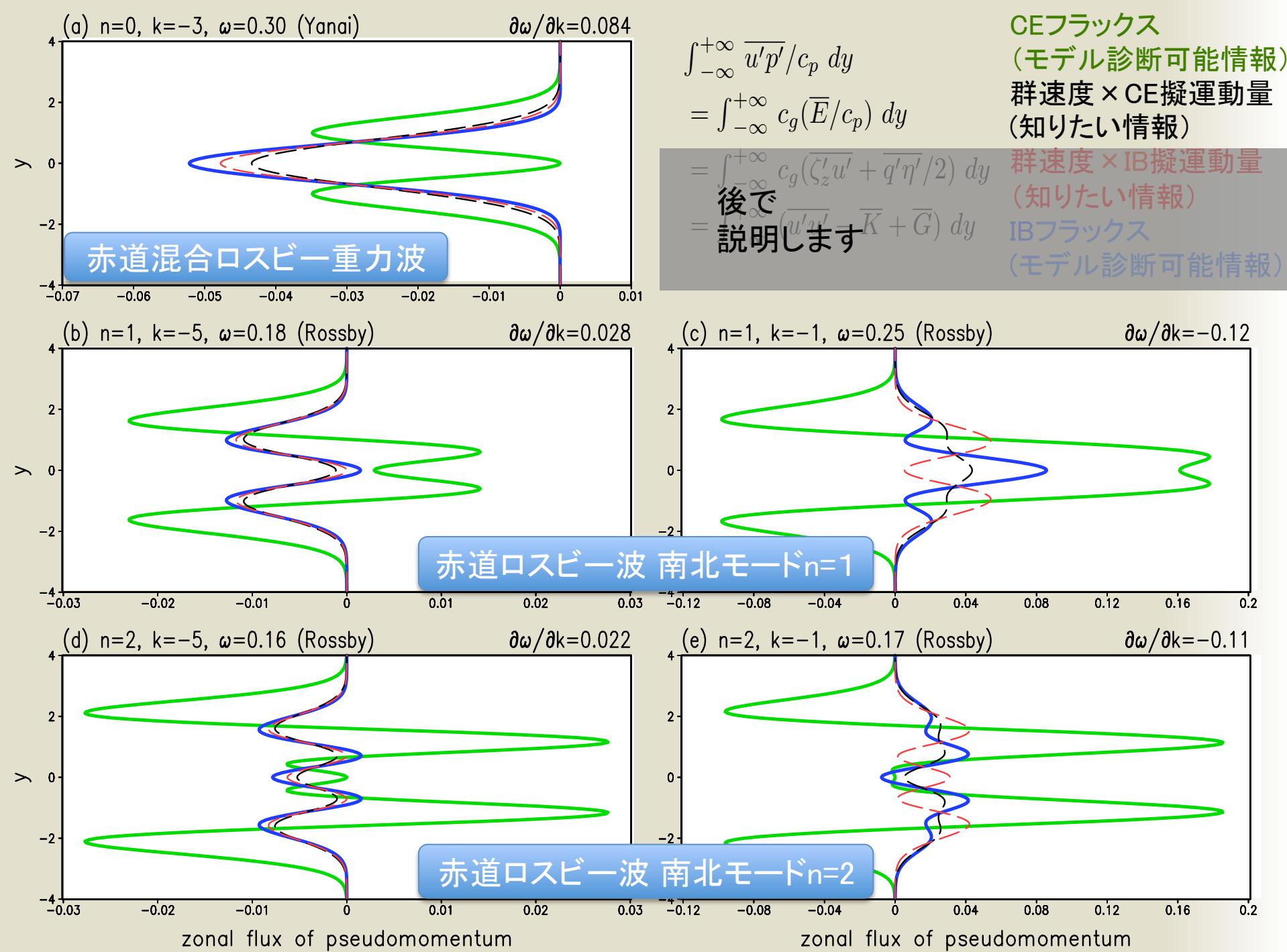
$$K = (u'^2 + v'^2)/2, \quad G = (N^2/2)\zeta'^2,$$

Classical Energy-based (CE) 擬運動量の時間発展式 [EP2]

$$\underbrace{(K + G)}_E_t + \nabla \cdot \langle\!\langle u'p', v'p', w'p' \rangle\!\rangle = 0, \quad c_p \equiv \omega/k, \quad c_g \equiv \partial\omega/\partial k$$

$$(E/c_p)_t + \nabla \cdot \langle\!\langle u'p'/c_p, v'p'/c_p, w'p'/c_p \rangle\!\rangle = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u'p'}/c_p \ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} c_g(\bar{E}/c_p) \ dy, \quad \overline{u'p'}/c_p \neq c_g(\bar{E}/c_p)$$



Classical Energy-based (CE)
擬運動量の時間発展式
(EPの関係式)

エネルギーとの関連は有用
3次元フラックスが圧力フラックスに
近いので惑星波の群速度ベクトルの
考察に不向き

一般化した
Taylor-Brethertonの恒等式
(渦位フラックスの別表現)

渦や不安定波問題に応用可



Impulse-Bolus (IB) 擬運動量
の時間発展式
(EPの関係式)
3次元フラックスが
Plumb (1986)の表現に近いので
惑星波の群速度ベクトルを示唆

しかしボーラス速度の正体が不明

1980年代の研究: 浅水方程式か温位座標系を使用

Ageostrophic Taylor-Bretherton identity

Tung (1986)

Hayashi and Young (1987)

McPhaden and Ripa (1990)

Takehiro and Hayashi (1992)

this study

Ageostrophic Eliassen-Palm relation

Ripa (1982)

Andrews (1983a)

Haynes (1988)

Brunet and Haynes (1996)

this study

Ripa (1982, JPO): 上記の[EP2]だけを考察

- 浅水方程式(赤道波を想定しているが中緯度慣性重力波・惑星波に応用可)
- 時間平均→水平2次元
- 多層モデルにも不安定波にも応用可 (Haynes, 1988; Sakai 1989; Iga, 1999)
- なぜボーラス速度(Rhines, 1982)が擬運動量の代わりに?
- その後普及しない…大多数の研究者はEuler平均でモデル解析するのを好む

全ての緯度帯の線形中立波の支配方程式(高さ座標系における時間平均からのずれ)

$$\begin{aligned} u'_t - (f_0 + \beta y)v' &= -p'_x, \\ v'_t + (f_0 + \beta y)u' &= -p'_y, \\ \rho'_t + w'\bar{\rho}_z &= 0, \\ u'_x + v'_y + w'_z &= 0, \\ \langle\langle u', v', w' \rangle\rangle &= \langle\langle \xi'_t, \eta'_t, \zeta'_t \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta' &\equiv -\rho'/\bar{\rho}_z = -p'_z/N^2, \\ K &= (u'^2 + v'^2)/2, \quad G = (N^2/2)\zeta'^2, \\ q' &\equiv v'_x - u'_y - (f_0 + \beta y)\zeta'_z, \\ q'_t + \beta v' &= 0, \\ \eta' &= -q'/\beta, \end{aligned}$$

Ripa (1982, JPO): 上記の[EP2]だけを考察

- 浅水方程式(赤道波を想定しているが中緯度慣性重力波・惑星波に応用可)
- 時間平均→水平2次元
- 多層モデルにも不安定波にも応用可 (Haynes, 1988; Sakai 1989; Iga, 1999)
- なぜボーラス速度(Rhines, 1982)が擬運動量の代わりに?
- その後普及しない…大多数の研究者はEuler平均でモデル解析するのを好む

全ての緯度帯の線形中立波の支配方程式(高さ座標系における時間平均からのずれ)

$$\begin{aligned} u'_t - (f_0 + \beta y)v' &= -p'_x, \\ v'_t + (f_0 + \beta y)u' &= -p'_y, \\ \rho'_t + w'\bar{\rho}_z &= 0, \\ u'_x + v'_y + w'_z &= 0, \\ \langle\langle u', v', w' \rangle\rangle &= \langle\langle \xi'_t, \eta'_t, \zeta'_t \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta' &\equiv -\rho'/\bar{\rho}_z = -p'_z/N^2, \\ K &= (u'^2 + v'^2)/2, \quad G = (N^2/2)\zeta'^2, \\ q' &\equiv v'_x - u'_y - (f_0 + \beta y)\zeta'_z, \\ q'_t + \beta v' &= 0, \\ \eta' &= -q'/\beta, \end{aligned}$$

一般化したTaylor–Brethertonの恒等式(渦位フラックスの別表現) [3D-EP1]

$$\begin{aligned} \partial_t(\zeta'_z u') + q'v' &= -\nabla \cdot \langle\langle u'u' - K + G, v'u', \zeta'p'_x \rangle\rangle, \\ \partial_t(\zeta'_z v') - q'u' &= -\nabla \cdot \langle\langle u'v', v'v' - K + G, \zeta'p'_y \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= A - \bar{A} \\ \nabla &= \langle\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle\rangle \end{aligned}$$

一般化したTaylor–Brethertonの恒等式（渦位フラックスの別表現）[3D–EP1]

$$\partial_t(\zeta'_z u') + q' v' = -\nabla \cdot \langle\langle u' u' - K + G, v' u', \zeta' p'_x \rangle\rangle,$$

$$\partial_t(\zeta'_z v') - q' u' = -\nabla \cdot \langle\langle u' v', v' v' - K + G, \zeta' p'_y \rangle\rangle,$$

$$A' = A - \bar{A}$$

$$\nabla = \langle\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle\rangle$$

ボーラス速度って何ですか？(気象学会で発表後の質問)

(Peter Rhines氏: ウッズホール海洋研究所1982年サマースクールのテキスト)

深さ座標系でTaylor展開

$$\bar{A}^L = \bar{A} + \overline{\xi' A'_x + \eta' A'_y + \zeta' A'_z}$$

$$\tilde{A} = \bar{A} + \overline{\zeta' A'_z}$$

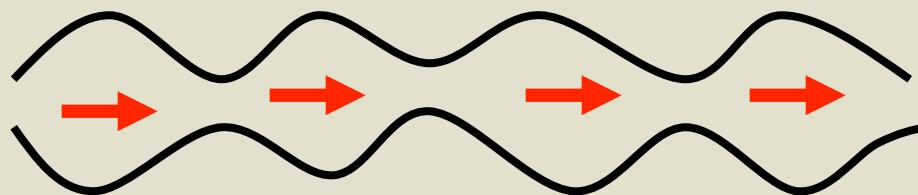
$$\hat{A} = \tilde{A} + \overline{\zeta'_z A'} = \bar{A} + (\overline{\zeta' A'})_z$$

深さ座標系で記述

$$u^{Stokes} \equiv \bar{u}^L - \bar{u} = \overline{\xi' u'_x + \eta' u'_y + \zeta' u'_z}$$

$$u^{qs} \equiv \hat{u} - \bar{u} = (\overline{\zeta' u'})_z$$

$$u^{bolus} \equiv \hat{u} - \tilde{u} = \overline{\zeta'_z u'}$$





<http://forum.teachingbooks.net/2012/11/guest-blogger-nic-bishop/>

全ての緯度帯の線形中立波の支配方程式(高さ座標系における時間平均からのずれ)

$$\begin{aligned} u'_t - (f_0 + \beta y)v' &= -p'_x, \\ v'_t + (f_0 + \beta y)u' &= -p'_y, \\ \rho'_t + w'\bar{\rho}_z &= 0, \\ u'_x + v'_y + w'_z &= 0, \\ \langle\langle u', v', w' \rangle\rangle &= \langle\langle \xi'_t, \eta'_t, \zeta'_t \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta' &\equiv -\rho'/\bar{\rho}_z = -p'_z/N^2, \\ K &= (u'^2 + v'^2)/2, \quad G = (N^2/2)\zeta'^2, \\ q' &\equiv v'_x - u'_y - (f_0 + \beta y)\zeta'_z, \\ q'_t + \beta v' &= 0, \\ \eta' &= -q'/\beta, \end{aligned}$$

一般化したTaylor–Brethertonの恒等式（渦位フラックスの別表現）[EP1]

$$\begin{aligned} \partial_t(\zeta'_z u') + q'v' &= -\nabla \cdot \langle\langle u'u' - K + G, v'u', \zeta' p'_x \rangle\rangle, \\ \partial_t(\zeta'_z v') - q'u' &= -\nabla \cdot \langle\langle u'v', v'v' - K + G, \zeta' p'_y \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= A - \bar{A} \\ \nabla &= \langle\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle\rangle \end{aligned}$$

Impulse–Bolus (IB) 擬運動量の時間発展式 [EP2]

$$\begin{aligned} \partial_t(\zeta'_z u' + q'\eta'/2) + \nabla \cdot \langle\langle u'u' - K + G, v'u', \zeta' p'_x \rangle\rangle &= 0, \\ \partial_t(\zeta'_z v' - q'\xi'/2) + \nabla \cdot \langle\langle u'v', v'v' - K + G, \zeta' p'_y \rangle\rangle &= \beta(v'\xi' - u'\eta')/2, \end{aligned}$$

ボーラス速度 惑星波のインパルス

$$\boxed{\zeta'_z u' + q'\eta'/2}$$

| | |
|-----------------------|--------------------|
| $\zeta'(u'_z - w'_x)$ | 重力波の インパルス(非静力) |
|-----------------------|--------------------|

まとめ

一般化した
Taylor–Brethertonの恒等式
(渦位フラックスの別表現)

渦や不安定波問題に応用可

1980年代の研究
浅水方程式を使用

Classical Energy-based (CE)
擬運動量の時間発展式
(EPの関係式)
エネルギーとの関連は有用
3次元フラックスが圧力フラックスに
近いので惑星波の群速度ベクトルの
考察に不向き

↓
Impulse–Bolus (IB) 擬運動量
の時間発展式
(EPの関係式)
3次元フラックスが
Plumb (1986)の表現に近いので
惑星波の群速度ベクトルを示唆
しかしボーラス速度の正体が不明

Classical Energy-based (CE) 擬運動量の時間発展式 [EP2]

$$\underbrace{(K + G)}_E_t + \nabla \cdot \langle\langle u' p', v' p', w' p' \rangle\rangle = 0, \quad c_p \equiv \omega/k, \quad c_g \equiv \partial\omega/\partial k$$

$$(E/c_p)_t + \nabla \cdot \langle\langle u' p'/c_p, v' p'/c_p, w' p'/c_p \rangle\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u' p'}/c_p \ dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_g(\overline{E}/c_p) \ dy \end{aligned}$$

Classical Energy-based (CE) 擬運動量の時間発展式 [EP2]

$$\underbrace{(K + G)}_E_t + \nabla \cdot \langle\langle u' p', v' p', w' p' \rangle\rangle = 0, \quad c_p \equiv \omega/k, \quad c_g \equiv \partial \omega / \partial k$$

$$(E/c_p)_t + \nabla \cdot \langle\langle u' p'/c_p, v' p'/c_p, w' p'/c_p \rangle\rangle = 0,$$

$$\pi' \equiv \int^t p' dt,$$

$$u' - f\eta' = -\pi'_x,$$

$$v' + f\xi' = -\pi'_y,$$

$$E \equiv K + G$$

$$= (u'^2 + v'^2 + N^2 \zeta'^2)/2$$

$$= (u' \xi'_t + v' \eta'_t - \zeta \pi'_{zt})/2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u' p'}/c_p dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c_g(\overline{E}/c_p) dy$$

CE擬運動量

$$(-u' \xi'_x - v' \eta'_x + \zeta' \pi'_{zx})/2 = \zeta'_z u' + q' \eta'/2 + \nabla \cdot \langle\langle -v' \eta', u' \eta', \zeta' \pi'_x \rangle\rangle/2$$

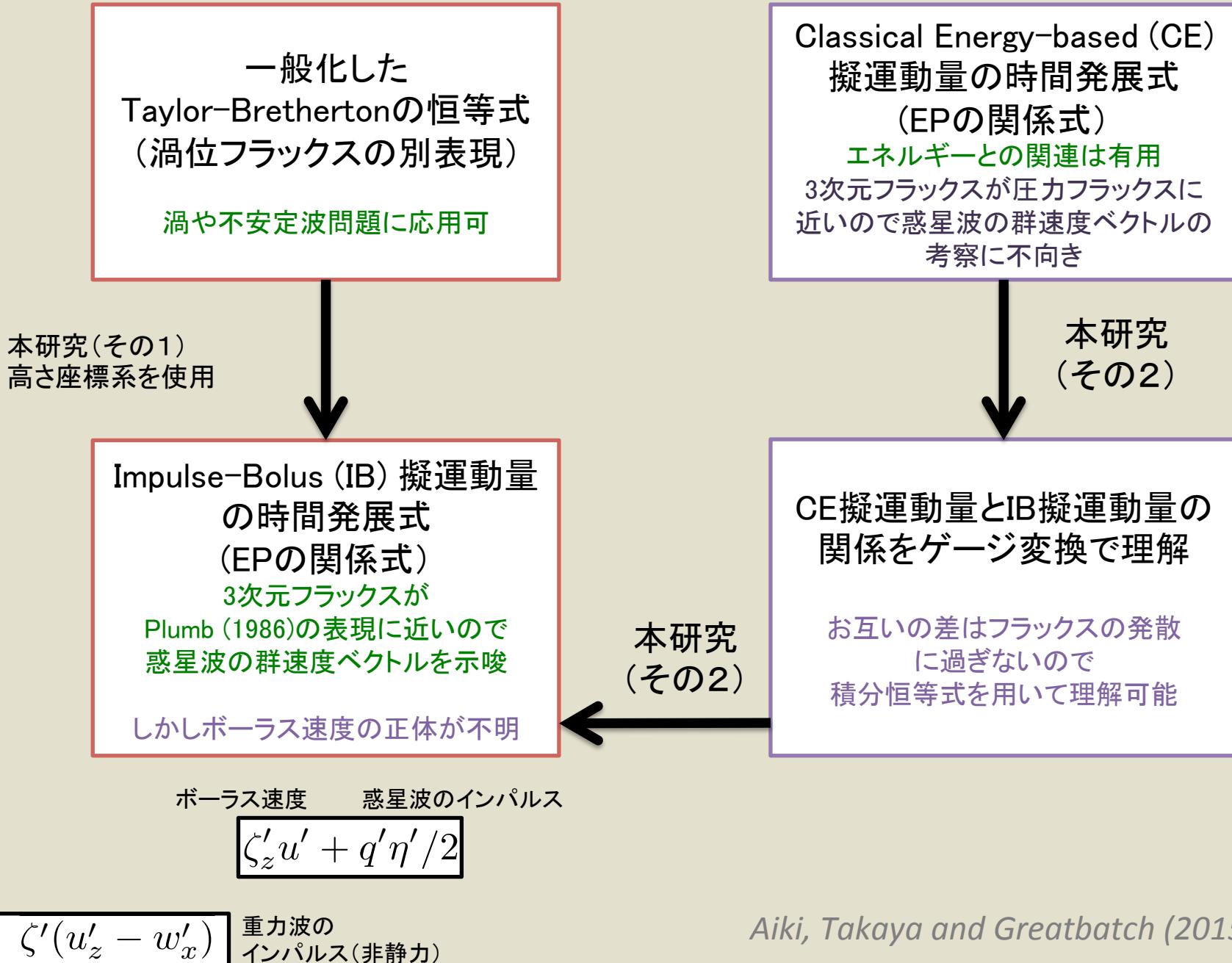
IB擬運動量

ゲージ変換

何かの3次元発散

Aiki, Takaya and Greatbatch (2015, JAS)

まとめ



Classical Energy-based (CE) 擬運動量の時間発展式 [EP2]

$$\underbrace{(K + G)}_E_t + \nabla \cdot \langle\langle u' p', v' p', w' p' \rangle\rangle = 0, \quad c_p \equiv \omega/k, \quad c_g \equiv \partial \omega / \partial k$$

$$(E/c_p)_t + \nabla \cdot \langle\langle u' p'/c_p, v' p'/c_p, w' p'/c_p \rangle\rangle = 0,$$

$$\pi' \equiv \int^t p' dt,$$

$$u' - f\eta' = -\pi'_x,$$

$$v' + f\xi' = -\pi'_y,$$

$$E \equiv K + G$$

$$= (u'^2 + v'^2 + N^2 \zeta'^2)/2$$

$$= (u' \xi'_t + v' \eta'_t - \zeta \pi'_{zt})/2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u' p'}/c_p dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c_g (\overline{E}/c_p) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c_g (\overline{\zeta'_z u'} + \overline{q' \eta'}/2) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{u' u'} - \overline{K} + \overline{G}) dy$$

CE擬運動量

$$(-u' \xi'_x - v' \eta'_x + \zeta' \pi'_{zx})/2 = \zeta'_z u' + q' \eta'/2 + \nabla \cdot \langle\langle -v' \eta', u' \eta', \zeta' \pi'_x \rangle\rangle/2$$

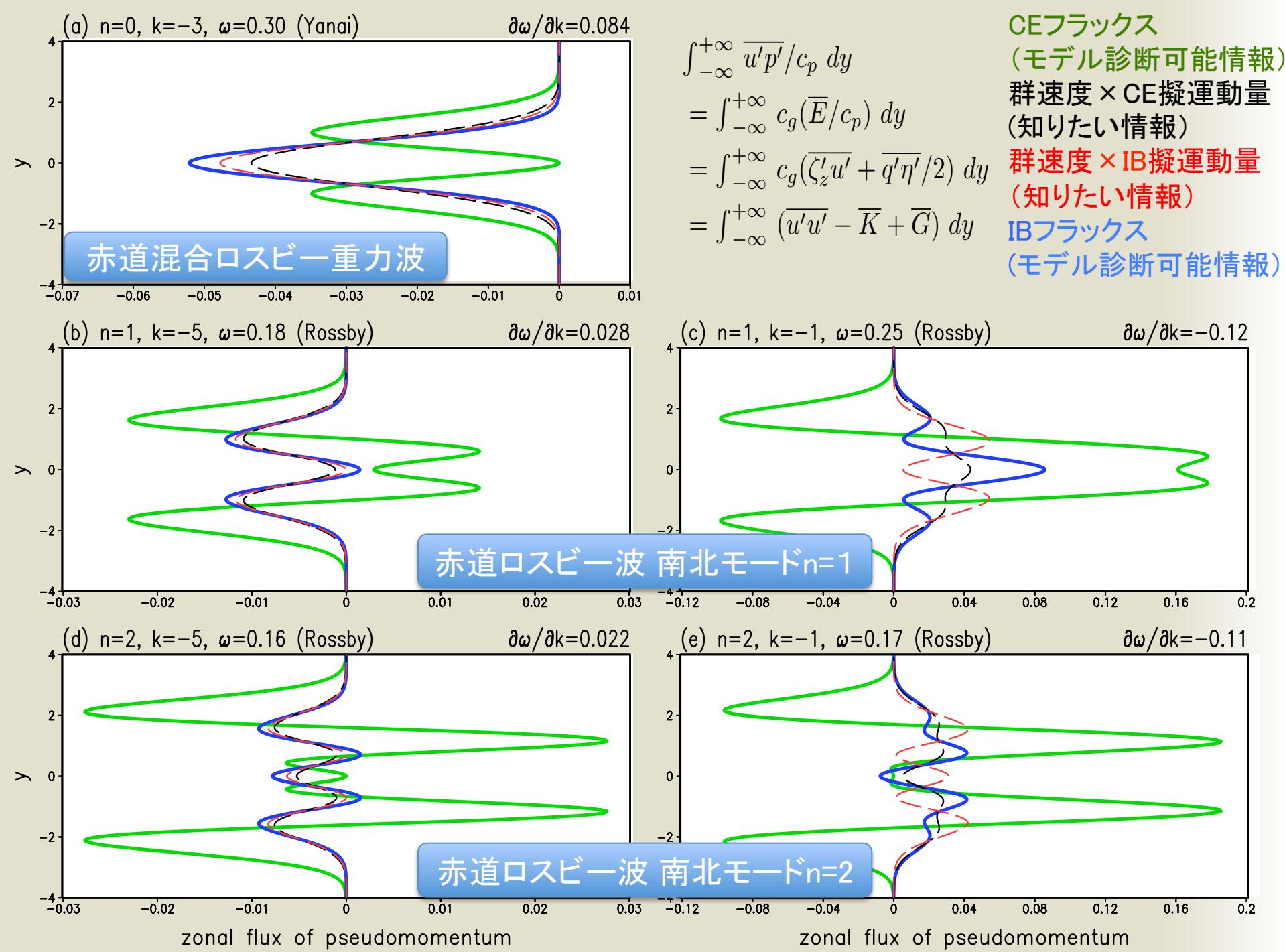
IB擬運動量

ゲージ変換

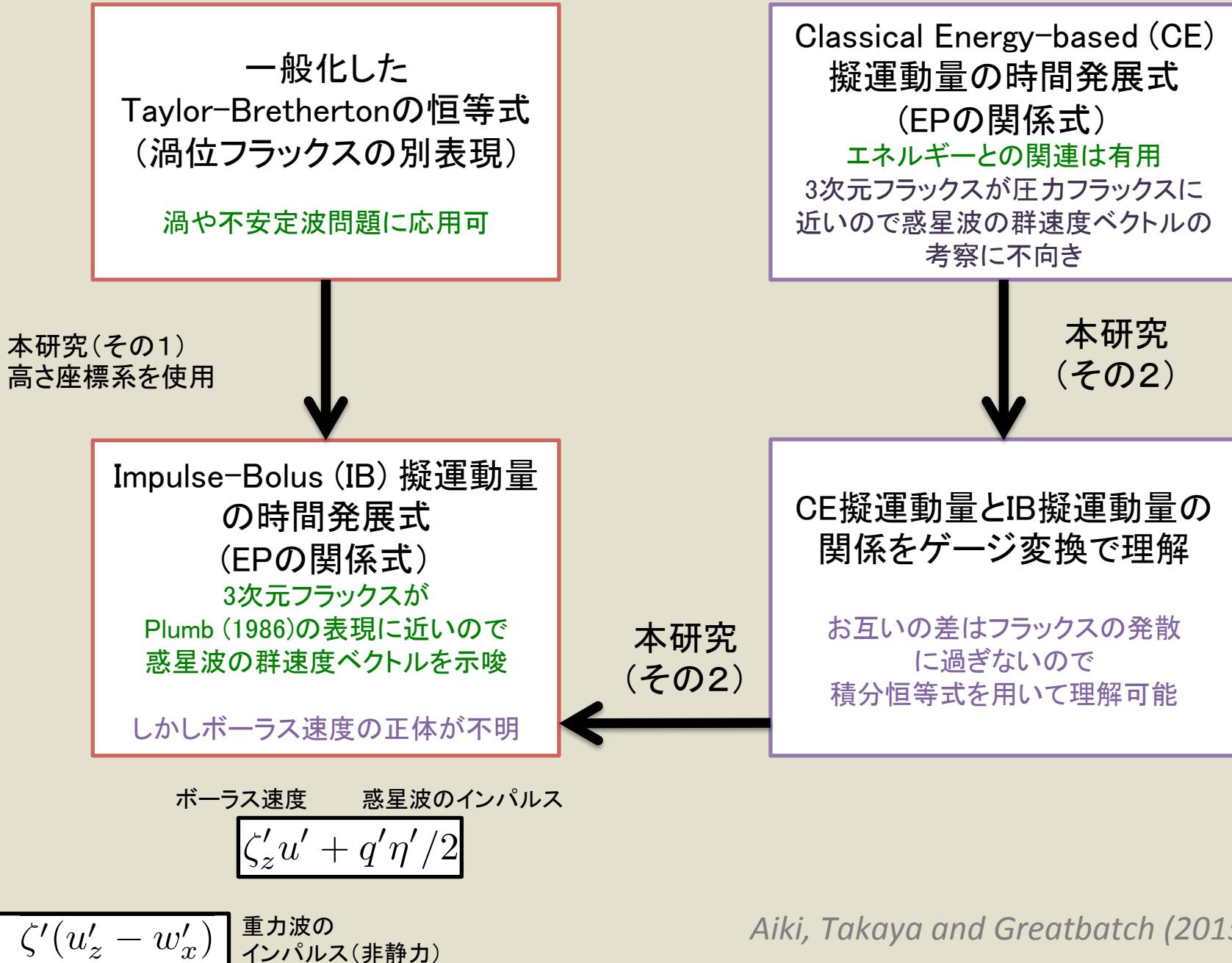
何かの3次元発散

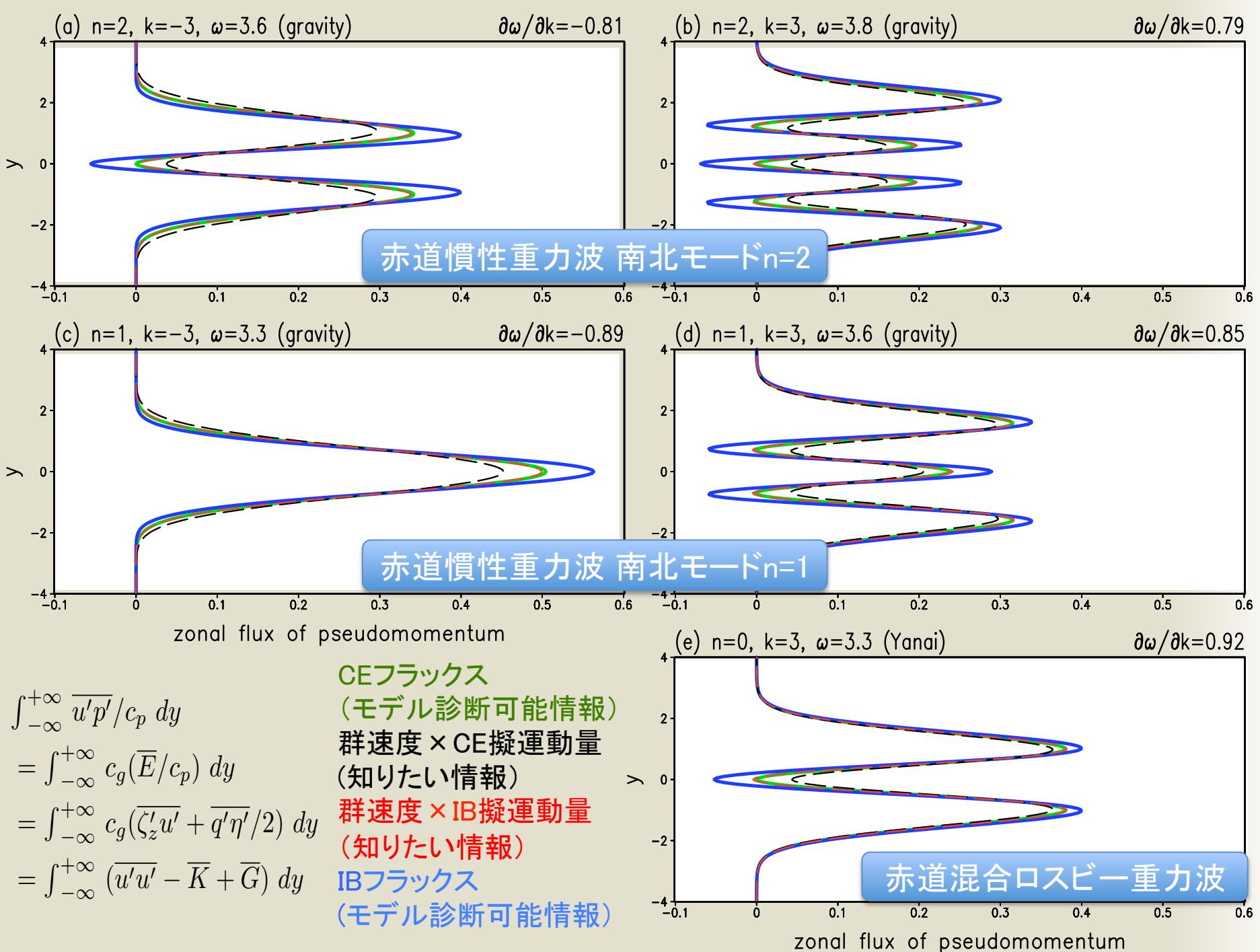
Impulse-Bolus (IB) 擬運動量の時間発展式 [EP2]

$$\partial_t (\zeta'_z u' + q' \eta'/2) + \nabla \cdot \langle\langle u' u' - K + G, v' u', \zeta' p'_x \rangle\rangle = 0,$$

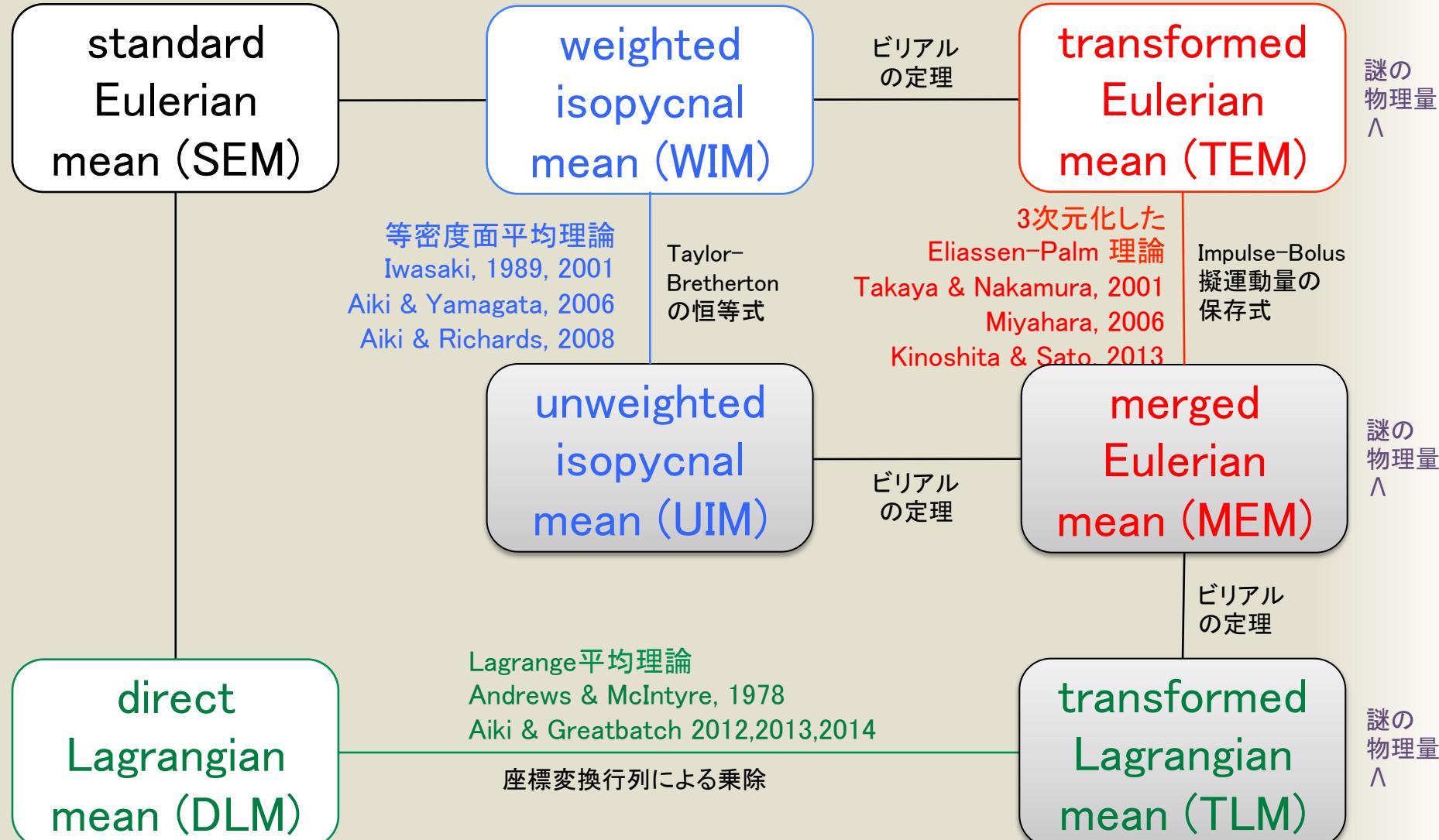


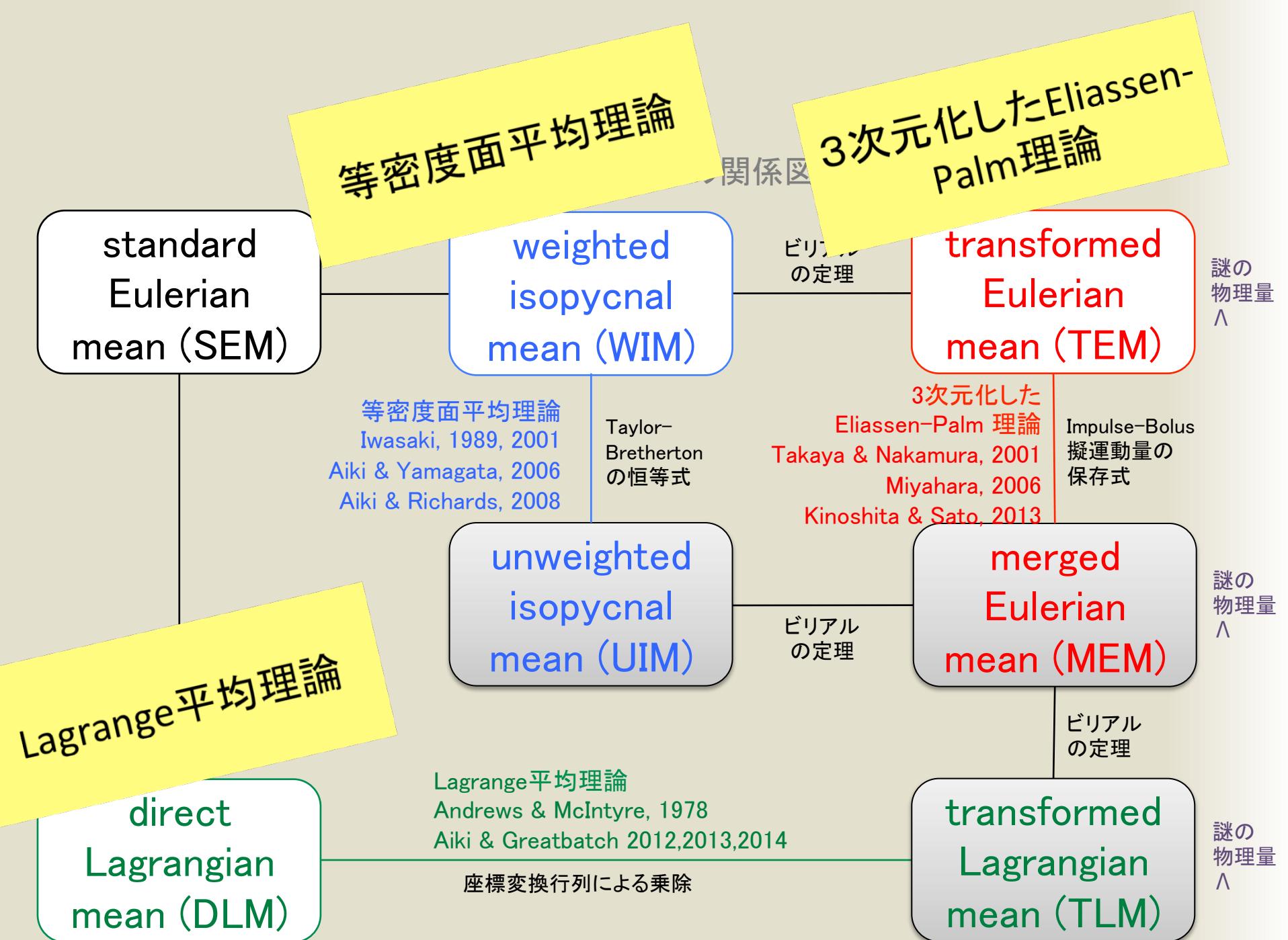
まとめ





各理論の運動量方程式の関係





風波・水面波

direct
Lagrangian
mean (DLM)

座標変換行列による乗除

Lagrangian
Andrews & Montgomery
Aiki & Greatbatch 2012,2013,2014

standard
Eulerian
mean (SEM)

傾圧不安定波

weighted
isopycnal
mean (WIM)

等密度面平均理論
Iwasaki, 2001
Aiki & Yamagata, 2006
Aiki & Richards, 2008

Taylor–
Bretherton
の恒等式

unweighted
isopycnal

- Langmuir循環におけるVortex Force
- 波浪から表層流への運動量伝達

transformed
Lagrangian
mean (TLM)

ビリアル
の定理

merged
Eulerian
mean (MEM)

3次元化した
S–Palm 理論
Kanbara, 2001
Kanbara, 2006
Kanbara & Sato, 2013

Impulse–Bolus
擬運動量の
保存式

関係図

ビリアル
の定理

各種Rossby波

transformed
Eulerian
mean (TEM)

謎の
物理量
△

謎の
物理量
△

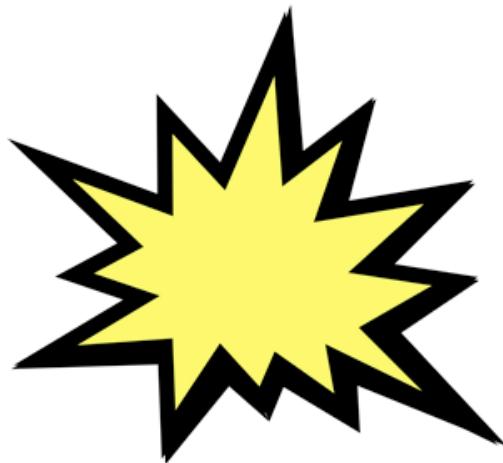
謎の
物理量
△

AMS 20th Conference on Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics
15-19 June, 2015 in Minneapolis

W. R. Young

Why the bolus velocity deserved to **die and how I killed it**

<https://ams.confex.com/ams/20Fluid/webprogram/Paper273091.html>



H. Aiki

Why the bolus velocity deserved to **survive and how we use it**

<https://ams.confex.com/ams/20Fluid/webprogram/Paper272904.html>