

MIMに関する研究ノート

小玉知央*

平成 21 年 6 月 11 日

目次

1	はじめに	2
第 I 部 MIM 方程式系		3
2	定常 + 非定常	3
2.1	帯状平均	3
2.2	全球平均	7
2.3	雑多な関係式	8
2.3.1	2 次相関量	8
2.3.2	p 系から p_{\dagger} 系、 p_{\dagger} 系から $p_{\dagger\dagger}$ 系への変換公式	8
2.3.3	気温 T	9
2.3.4	ジオポテンシャル Φ と Montgomery の流線関数 M	9
2.3.5	気温 T_{\dagger} と $T_{\dagger\dagger}$	11
2.3.6	ジオポテンシャル $\Phi_{\dagger}, \Phi_{\dagger\dagger}$ と Montgomery の流線関数 $M_{\dagger}, M_{\dagger\dagger}$	11
2.3.7	Exner 関数 Π_{\dagger} と $\Pi_{\dagger\dagger}$	12
2.4	プリミティブ方程式	13
2.5	連続の式と流線関数	14
2.6	東西方向の帯状平均運動方程式	16
2.6.1	EP フラックスとバランスする流線関数	19
2.6.2	TEM との関係	20
2.7	東西方向の渦運動方程式	22
2.8	南北方向の帯状平均運動方程式	23
2.9	南北方向の渦運動方程式	24
2.10	熱力学の式	24
2.11	鉛直積算	25
2.12	鉛直積算値の全球平均	26
2.13	エネルギー	26
2.13.1	全運動エネルギー K	26
2.13.2	基本場の運動エネルギー K_Z	26

*東北大学大学院理学研究科 地球物理学専攻

2.13.3	渦運動エネルギー K_E	27
2.13.4	全位置エネルギー P	27
2.13.5	基底状態の位置エネルギー P_G	28
2.13.6	基本場の位置エネルギー P_Z と有効位置エネルギー A_Z	29
2.13.7	渦有効位置エネルギー A_E	30
2.14	エネルギーの収支方程式	31
2.14.1	帯状平均運動エネルギー K_Z	31
2.14.2	渦運動エネルギー K_E	32
2.14.3	基底状態の位置エネルギー P_G	37
2.14.4	基本場の位置エネルギー P_Z	39
2.14.5	基本場の有効位置エネルギー A_Z	41
2.14.6	渦有効位置エネルギー A_E	42
2.14.7	非断熱加熱	46
2.15	エネルギー変換	48
2.15.1	記号の意味	48
2.15.2	A_Z と K_Z	49
2.15.3	K_Z と A_E	49
2.15.4	K_Z と K_E	50
2.15.5	A_E と K_E	52
2.16	局所的なエネルギー収支	52
2.17	全球積分したエネルギー変換	53

1 はじめに

本文書は Iwasaki (1989) に基づく MIM (Mass-weighted Isentropic zonal Mean, 通称 p_{\dagger} 系) の数式やプログラムに関する情報を整理したものである。著者自身の理解度を反映したものであるため、内容は力学に偏っており、また、不正確な記述があるかもしれないことを予めご容赦願いたい。

前半では p_{\dagger} 系における運動方程式、エネルギー方程式の導出を示す。後半では広く用いられている解析ツール MIM と、定常計算の改善を目指して開発中の p_dagger について、実行方法とソースコードを読む上で参考になる情報(変数名の規則など)を示す。

MIM の代表的な参考文献を以下に示す。

- Iwasaki (1989), Tanaka, *et al.* (2004) : 質量流線関数、EP フラックス
- Iwasaki (2001), Uno and Iwasaki (2006) : エネルギー
- Miyazaki and Iwasaki (2005) : 物質輸送

第I部

MIM方程式系

2 定常 + 非定常

2.1 帯状平均

はじめに鉛直座標 p_{\dagger} を定義する。 p_{\dagger} は温位面における気圧の帯状平均である。

$$p_{\dagger}(\phi, \theta, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\lambda, \phi, \theta, t) d\lambda \quad (2.1.1)$$

温位面が下部境界と交差するため気圧が定義できない場合は、地表面気圧 p_s を p のかわりに用いて平均を行う。つまり地中では $p = p_s$ とする。図1に p_{\dagger} 計算のイメージを示す。従って、 p_{\dagger} 座標の定義域は $0 < p_{\dagger} \leq p_{\dagger s}$ 、但し $p_{\dagger s}$ は

$$p_{\dagger s}(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_s(\lambda, \phi, t) d\lambda \quad (2.1.2)$$

となる。図2に(2.1.1)式の被積分関数である p と p_{\dagger} の関係を示した。 $p_{\dagger} = p_{\dagger s}$ のとき、 $p = p_s$ であることに注意。図3は θ と p_{\dagger} の関係。

p_{\dagger} の代わりに次元を高度に変換した対数気圧座標 z_{\dagger} もよく用いられる。状態方程式から、標準密度 $\rho_0(z_{\dagger})$ を

$$\rho_0 \equiv \frac{p_{\dagger}}{RT_0} = \frac{p_{\dagger}}{gH} \quad (2.1.3)$$

と定義する。但し T_0 は定数。 $H = \frac{RT_0}{g}$ はスケールハイトで、プログラム中では $H = 7000$ [m] とした。 p_{\dagger} 、 ρ_0 を用いると、静水圧平衡

$$dp_{\dagger} = -\rho_0 g dz_{\dagger} \quad (2.1.4)$$

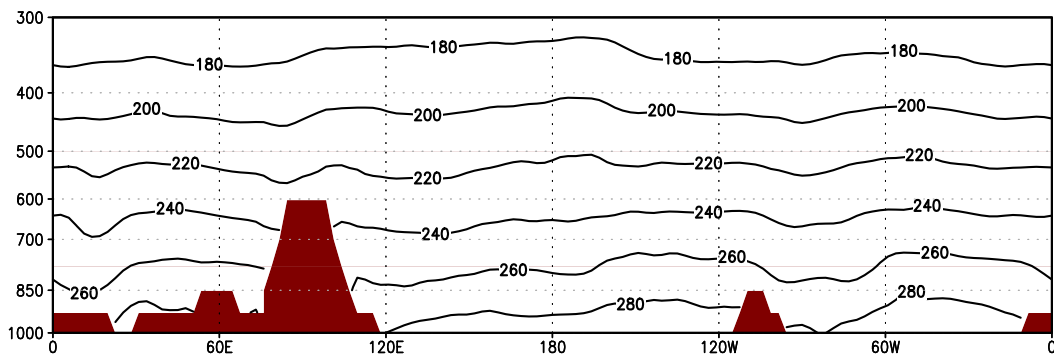


図1: p_{\dagger} 計算の説明。横軸は経度、縦軸は気圧、コンターは θ 面、茶シェードは地形である。 $\theta =$ 一定の面で東西平均した p が p_{\dagger} である。 θ 面が地面にぶつかる場合は、地表面の p を使用して東西平均を行う。図は 30°N におけるモデル出力を基に作成した。

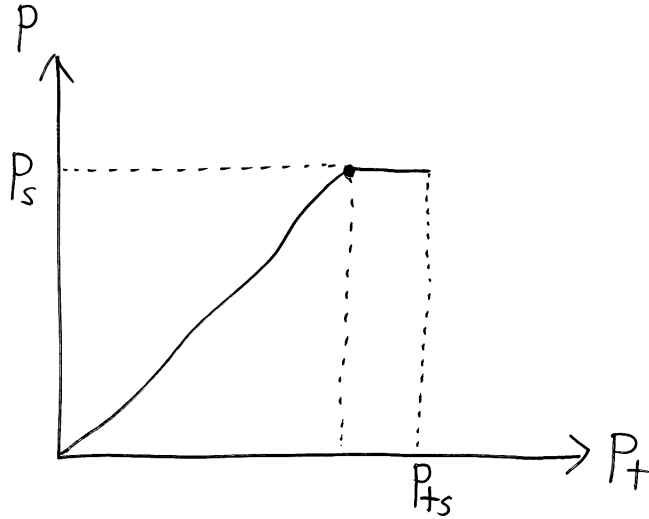


図 2: p と p_{\dagger} の関係の模式図。地中では $p = p_s$ と定義する。

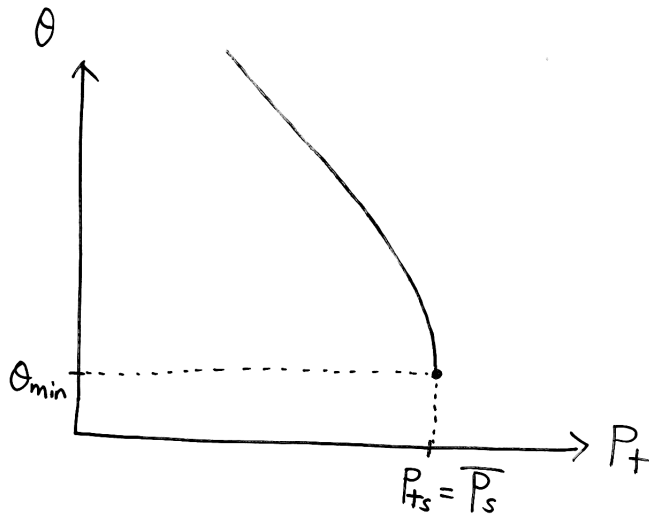


図 3: θ と p_{\dagger} の関係の模式図。 θ 面が地面と交差し始めると、 θ に対する p_{\dagger} の変化は緩やかになり始める(= p_{\dagger} に対して θ は激しく変化ようになる)。

$p_{\dagger} \rightarrow p_{\dagger_s}$ における接線は、 θ に平行、すなわち $\lim_{\theta \rightarrow \theta_{min}} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} = 0$ である。なぜなら

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_{min}} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^{\lambda_{min}-\delta/2} \frac{\partial p_s}{\partial \theta} d\lambda + \int_0^{\lambda_{min}+\delta/2} \frac{\partial p_s}{\partial \theta} d\lambda + \int_{\lambda_{min}-\delta/2}^{\lambda_{min}+\delta/2} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\lambda \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\lambda_{min}-\delta/2}^{\lambda_{min}+\delta/2} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\lambda. \text{ ここで } f \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_{min}-\delta/2}^{\lambda_{min}+\delta/2} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\lambda \text{ とおくと、} \frac{\delta}{2\pi} \min \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) < f < 0.$$

よって $\delta \rightarrow 0$ のとき $f \rightarrow 0$ 。ゆえに $\lim_{\theta \rightarrow \theta_{min}} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} = 0$ 。

を満たすような対数気圧座標 z_{\uparrow} は、

$$z_{\uparrow} \equiv -H \ln(p_{\uparrow}/p_0) \quad (2.1.5)$$

と定義できる。ここで、 $p_0 = 1000$ [hPa] を用いる。

なお、 H が定数であることから、 p_{\uparrow} と z_{\uparrow} の関係式は水平、時間に依存しない。つまり

$$\left(\frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial t}\right)_{z_{\uparrow}} = \left(\frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial \lambda}\right)_{z_{\uparrow}} = \left(\frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial \phi}\right)_{z_{\uparrow}} = 0 \quad (2.1.6)$$

である。

このノートで登場する密度 $\rho(\lambda, \phi, z_{\uparrow}, t)$ は、 z_{\uparrow} 系における密度である¹。これは、 p と z_{\uparrow} の間の静水圧平衡から定義する。

$$\rho \equiv -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z_{\uparrow}} \quad (2.1.7)$$

$$dp = -\rho g dz_{\uparrow} \quad (2.1.8)$$

(2.1.4) 式を用いて変形すると、

$$dp = \frac{\rho}{\rho_0} dp_{\uparrow} \quad (2.1.9)$$

よって

$$\frac{\partial p}{\partial p_{\uparrow}} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.1.10)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 \quad (2.1.11)$$

が成り立つ²。ただし上線は温位面上での帯状平均を示す。

鉛直流 $\omega_{\uparrow}, w_{\uparrow}$ はそれぞれ、

$$\omega_{\uparrow} \equiv \frac{Dp_{\uparrow}}{Dt} \quad (2.1.12)$$

$$w_{\uparrow} \equiv \frac{Dz_{\uparrow}}{Dt} \quad (2.1.13)$$

¹Iwasaki (1989) では p_{\uparrow} 系の方程式を θ 系の方程式から導くため、 θ 系における密度 ρ_{θ} (単位 [kg/(m²K)]) を定義している。これは p_{\uparrow} 系は本質的に温位座標系 (の変形) であることを考えると、最も素直な導出法であるといえるだろう。この導出方法については氏家 (2007) が詳しい。これに対して本ノートでは、ラグランジュ微分を直接 z_{\uparrow} 系で展開する手法を取っており、 ρ も z_{\uparrow} 系における密度 (単位 [kg/m³]) として定義している。このように定義すると、 θ 面で帯状平均した ρ と標準密度 ρ_0 は完全に等しくなり、以後の展開が楽になる。また、密度の定義も直感的である。

²(2.1.11) 式は一見すると奇異な関係に見える。なぜなら $\rho(\lambda, \phi, z_{\uparrow}, t)$ を θ 面 (あるいは z_{\uparrow} 面) で帯状平均した ρ_0 は、 λ だけでなく ϕ や t にも依存しなくなるからである。これは p_{\uparrow} という座標の定義の仕方に起因している。変数 $p(\lambda, \phi, p_{\uparrow}, t)$ を θ 面で帯状平均すると p_{\uparrow} となり、これは当然 p_{\uparrow} (あるいは z_{\uparrow}) にしか依存しない。

と定義する。(2.1.4)、(2.1.6)式から分かるように、

$$\omega_{\dagger} = -\rho_0 g w_{\dagger} \quad (2.1.14)$$

が成り立つ。

任意変数 A の帯状平均は、 p_{\dagger} の定義と同様に温位面上で行う。(質量重みのない)帯状平均は、

$$\bar{A}(\phi, p_{\dagger}, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \phi, p_{\dagger}, t) d\lambda \quad (2.1.15)$$

と定義する。ただし地中では p_{\dagger} の定義の時と同様に、 A の地表面値を用いる。 p_{\dagger} の定義から、 (ϕ, θ, t) が一定のとき p_{\dagger} 面と θ 面は平行であることに注意。

より重要なのは質量の重みをつけた帯状平均 (MIM: Mass-weighted Isentropic zonal Mean) である。質量の重みを * で表現すると、帯状平均と帯状平均からの偏差は、

$$\bar{A}^*(\phi, p_{\dagger}, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \phi, p_{\dagger}, t) \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} / \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \right) d\lambda \quad (2.1.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \phi, p_{\dagger}, t) \left(\frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} \right) d\lambda \quad (2.1.17)$$

$$A'(\lambda, \phi, p_{\dagger}, t) = A - \bar{A}^* \quad (2.1.18)$$

と定義する。但し (2.1.10) 式より、 $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} / \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} \right) = \frac{\rho}{\rho_0}$ は規格化した各温位面間の質量の重みである³。 \bar{A}^* を質量重み付き帯状平均と呼ぶ。このイメージを図 4 に示す。

地表面 ($p_{\dagger} \rightarrow p_{\dagger s}$) における質量重みは、 θ の東西方向の最小値を $\theta_{min}(\phi, t)$ とおいたとき、

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_{min}} \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} = 2\pi \delta\{\lambda - \lambda(\theta_{min})\} \quad (2.1.19)$$

但し $\delta(x)$ はデルタ関数、 2π は帯状平均したときの規格化因子である。この式は、地表面近傍における質量重みは θ の最小値の付近のみに存在することを表している。従って、地表面における帯状平均は、

$$\bar{A}_s^*(\phi, t) = A_s(\lambda_s, \phi, t) \quad (2.1.20)$$

$$= A_s\{\lambda(\theta_{min}), \phi, t\} \quad (2.1.21)$$

³ p [N/m²] とは、ある単位面積の上方にある空気の質量に g をかけたもの。したがって $\partial p / \partial \theta$ はある温位面 $\theta \sim \theta + \Delta\theta$ に含まれる質量に比例する。

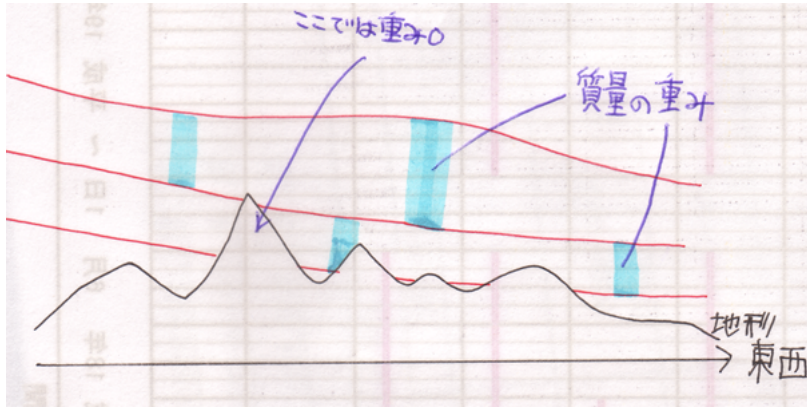


図 4: 質量重み付き帯状平均の模式図。

2.2 全球平均

全球平均を考えない場合 (e.g. EP フラックス、質量流線関数) この節はスキップしてよい。東西平均とのアナロジーで、鉛直座標 $p_{\dagger\dagger}$ を定義する。 $p_{\dagger\dagger}$ は温位面における p の全球平均 (p_{\dagger} の南北平均) である。

$$p_{\dagger\dagger}(\theta, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} p(\lambda, \phi, \theta, t) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (2.2.1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_{\dagger}(\phi, \theta, t) \cos \phi d\phi \quad (2.2.2)$$

但し地中では $p = p_s$ 又は $p_{\dagger} = p_{\dagger s}$ として計算する。従って地表面値 $p_{\dagger\dagger s}$ は、

$$p_{\dagger\dagger s}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} p_s(\lambda, \phi, t) \cos \phi d\phi d\lambda \quad (2.2.3)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_{\dagger s}(\phi, t) \cos \phi d\phi \quad (2.2.4)$$

となる。 $p_{\dagger\dagger s}(t)$ は大気的全質量に相当するため、実質的には時間依存しない。 $p_{\dagger\dagger}$ 系における標準密度 $\rho_{\dagger\dagger 0}(p_{\dagger\dagger})$ 、対数気圧座標 $z_{\dagger\dagger}$ 、および密度 $\rho_{\dagger\dagger}(\lambda, \phi, p_{\dagger\dagger}, t)$ は⁴、

$$\rho_{\dagger\dagger 0} \equiv \frac{p_{\dagger\dagger}}{gH} \quad (2.2.5)$$

$$dp_{\dagger\dagger} \equiv -\rho_{\dagger\dagger 0} g dz_{\dagger\dagger} \quad (2.2.6)$$

$$dp \equiv -\rho_{\dagger\dagger} g dz_{\dagger\dagger} \quad (2.2.7)$$

⁴ $\rho_{\dagger\dagger}$ は p_{\dagger} 系における ρ に対応している。 ρ も本当は ρ_{\dagger} と表記すべきかもしれない。

これより、

$$\frac{\partial p}{\partial p_{\dagger\dagger}} = \frac{\rho_{\dagger\dagger}}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \quad (2.2.8)$$

南北平均を上括弧で表現すると、温位面上 ($p_{\dagger\dagger}$ 面上) における質量重み付き全球平均 $\overline{A^{**}}$ は、

$$\overline{A^{**}}(p_{\dagger\dagger}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \phi, p_{\dagger\dagger}, t) \cos \phi \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger\dagger}} d\phi d\lambda \quad (2.2.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overline{A^*} \cos \phi \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial p_{\dagger\dagger}} d\phi \quad (2.2.10)$$

ただし、 $\frac{\partial p}{\partial p_{\dagger\dagger}} = \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} \cdot \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial p_{\dagger\dagger}}$ を用いた。

2.3 雑多な関係式

2.3.1 2次相関量

$$\overline{(A'B')^*} = \overline{\{(A - \overline{A^*})(B - \overline{B^*})\}^*} \quad (2.3.1)$$

$$= \overline{(AB)^*} - \overline{\{A\overline{B^*}\}^*} - \overline{\{\overline{A^*}B\}^*} + \overline{A^* \overline{B^*}} \quad (2.3.2)$$

$$= \overline{(AB)^*} - \overline{A^* \overline{B^*}} \quad (2.3.3)$$

2.3.2 p 系から p_{\dagger} 系、 p_{\dagger} 系から $p_{\dagger\dagger}$ 系への変換公式

数値誤差を減らすため、3次元の p 系から質量重み付き帯状平均した p_{\dagger} 系への変換には、以下の関係式を用いる。

$$\overline{A^*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} d\lambda \quad (2.3.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left(\int_0^{p_{\dagger}} A \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}'} dp_{\dagger}' \right) \right] d\lambda \quad (2.3.5)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^p A dp' \right) d\lambda \right] \quad (2.3.6)$$

$$\overline{A^*}(\phi, p_{\dagger}, t) = \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^p A(\lambda, \phi, p', t) dp' \right) d\lambda \right] \quad (2.3.7)$$

同様に、 p_{\uparrow} 系から $p_{\uparrow\uparrow}$ 系への変換は、

$$\widehat{A^{*}} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overline{A^*} \cos \phi \frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial p_{\uparrow\uparrow}} d\phi \quad (2.3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial p_{\uparrow\uparrow}} \left(\int_0^{p_{\uparrow\uparrow}} \overline{A^*} \cos \phi \frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial p_{\uparrow\uparrow}'} dp_{\uparrow\uparrow}' \right) \right] d\phi \quad (2.3.9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow\uparrow}} \left[\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{p_{\uparrow}} \overline{A^*} dp_{\uparrow}' \right) \cos \phi d\phi \right] \quad (2.3.10)$$

$$\widehat{A^{*}}(p_{\uparrow\uparrow}, t) = \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow\uparrow}} \left[\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{p_{\uparrow}} \overline{A^*}(\phi, p_{\uparrow}', t) dp_{\uparrow}' \right) \cos \phi d\phi \right] \quad (2.3.11)$$

2.3.3 気温 T

$$T(\lambda, \phi, p, t) = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa} \quad (2.3.12)$$

$$\kappa = \frac{R}{C_p} \quad (2.3.13)$$

2.3.4 ジオポテンシャル Φ と Montgomery の流線関数 M

静水圧平衡より、

$$dp = -\rho_z g dz = -\rho_z d\Phi = -\frac{p}{RT} d\Phi \quad (2.3.14)$$

ただし ρ_z は z 座標における密度。上式よりジオポテンシャル Φ は、

$$d\Phi = -\frac{RT}{p} dp \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (2.3.16)$$

もしくは

$$\Phi(\lambda, \phi, p, t) = \Phi_s + R \int_p^{p_s} T(\lambda, \phi, p', t) d(\log p') \quad (2.3.17)$$

但し $\Phi_s = gz_s$ 、 z_s は地表面高度である。この関係は普通の気圧座標において、温度からジオポテンシャルを計算する際に用いられる。

次に Montgomery の流線関数は、

$$M \equiv \Phi + C_p T \quad (2.3.18)$$

$$= \Phi + \Pi\theta \quad (2.3.19)$$

$$\Pi(p) \equiv C_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \quad (2.3.20)$$

但し $\Pi(p)$ は Exner 関数と呼ばれる。 $\Phi(\lambda, \phi, p, t)$ の全微分

$$d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_p dt + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_p d\lambda + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \right)_p d\phi + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} \right)_p dp \quad (2.3.21)$$

および (2.3.19) 式的全微分

$$dM = d\Phi + \Pi d\theta + \theta d\Pi \quad (2.3.22)$$

の両辺を ϕ, θ, t を固定して $d\lambda$ で割ると、

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_\theta = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_p + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta \quad (2.3.23)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial\lambda} \right)_\theta = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_\theta + \theta \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} \right)_\theta \quad (2.3.24)$$

$$= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_p + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta + \theta \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} \right)_\theta \quad (2.3.25)$$

ここで、(2.3.20) 式

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} \right)_\theta = C_p p_0^{-\kappa} \left(\frac{\partial p^\kappa}{\partial\lambda} \right)_\theta = C_p p_0^{-\kappa} \kappa p^{\kappa-1} \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta \quad (2.3.26)$$

$$= \frac{\kappa}{p} \Pi \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta = \frac{1}{p} \cdot \frac{R}{C_p} \cdot C_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta \quad (2.3.27)$$

$$= \frac{RT}{p\theta} \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta \quad (2.3.28)$$

および (2.3.16) 式より、

$$\left(\frac{\partial M}{\partial\lambda} \right)_\theta = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_p - \frac{RT}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta + \frac{RT}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial\lambda} \right)_\theta = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_p \quad (2.3.29)$$

ϕ についても同様であるが、 $p_\dagger(\phi, \theta, t)$ が ϕ に依存することを考慮すると、

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right)_p = \left(\frac{\partial M}{\partial\lambda} \right)_\theta = \left(\frac{\partial M}{\partial\lambda} \right)_{p_\dagger} \quad (2.3.30)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \right)_p = \left(\frac{\partial M}{\partial\phi} \right)_\theta \neq \left(\frac{\partial M}{\partial\phi} \right)_{p_\dagger} \quad (2.3.31)$$

2.3.5 気温 T_{\dagger} と T_{\ddagger}

位置エネルギーの定式化の準備として、気温 T_{\dagger} と T_{\ddagger} を導入する。(2.3.12) 式との類推から、

$$T_{\dagger}(\phi, p_{\dagger}, t) \equiv \theta \left(\frac{p_{\dagger}}{p_0} \right)^{\kappa} \quad (2.3.32)$$

$$T_{\ddagger}(p_{\ddagger}, t) \equiv \theta \left(\frac{p_{\ddagger}}{p_0} \right)^{\kappa} \quad (2.3.33)$$

\bar{T}^* とは違うので注意が必要である。文献によっては、 T_{\dagger} は $T(p_{\dagger})$ 、 T_{\ddagger} は $T(p_{\ddagger})$ と表記することもある⁵。

T_{\dagger} 、 T_{\ddagger} は位置エネルギーが最小になるように大気を断熱的に再配置したときの気温である。東西のみの再配置を許すと T_{\dagger} (東西基底状態)、全球の再配置を許すと T_{\ddagger} (全球基底状態) となる。詳細は後で議論する。

2.3.6 ジオポテンシャル $\Phi_{\dagger}, \Phi_{\ddagger}$ と Montgomery の流線関数 $M_{\dagger}, M_{\ddagger}$

T_{\dagger} 、 T_{\ddagger} と同様に、東西基底状態、全球基底状態におけるジオポテンシャル Φ_{\dagger} 、 Φ_{\ddagger} と、Montgomery の流線関数 M_{\dagger} 、 M_{\ddagger} を定義する。(2.3.15) 式との類推から、

$$d\Phi_{\dagger} \equiv -\frac{RT_{\dagger}}{p_{\dagger}} dp_{\dagger} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial p_{\dagger}} = -\frac{RT_{\dagger}}{p_{\dagger}} \quad (2.3.34)$$

$$d\Phi_{\ddagger} \equiv -\frac{RT_{\ddagger}}{p_{\ddagger}} dp_{\ddagger} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \Phi_{\ddagger}}{\partial p_{\ddagger}} = -\frac{RT_{\ddagger}}{p_{\ddagger}} \quad (2.3.35)$$

もしくは

$$\Phi_{\dagger}(\phi, p_{\dagger}, t) = \Phi_{\dagger s} + R \int_{p_{\dagger}}^{p_{\dagger s}} T_{\dagger} d(\log p_{\dagger}) \quad (2.3.36)$$

$$\Phi_{\ddagger}(p_{\ddagger}, t) = \Phi_{\ddagger s} + R \int_{p_{\ddagger}}^{p_{\ddagger s}} T_{\ddagger} d(\log p_{\ddagger}) \quad (2.3.37)$$

ただし、

$$\Phi_{\dagger s} = g \bar{z}_s \quad (2.3.38)$$

$$\Phi_{\ddagger s} = g \widehat{z}_s \quad (2.3.39)$$

⁵ $T(p)$ を p_{\dagger} 系に座標変換したと勘違いするので使用すべきではない

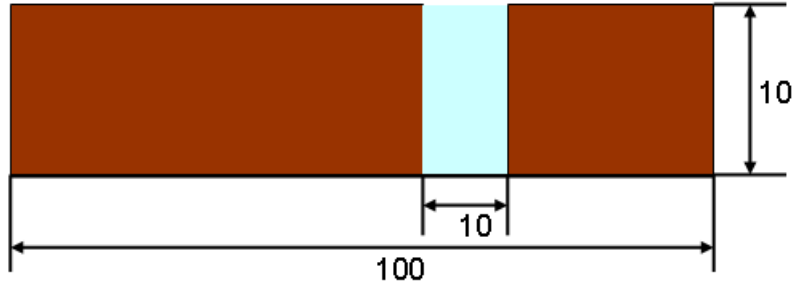


図 5: 溝のある地形。横軸は経度、縦軸は高度 (温位) 方向である。茶色は地形、水色は大気を表す。

$\Phi_{\dagger}, \Phi_{\ddagger}$ から導かれる Montgomery の流線関数 $M_{\dagger}, M_{\ddagger}$ は、

$$M_{\dagger}(\phi, p_{\dagger}, t) \equiv \Phi_{\dagger} + C_p T_{\dagger} \quad (2.3.40)$$

$$M_{\ddagger}(p_{\ddagger}, t) \equiv \Phi_{\ddagger} + C_p T_{\ddagger} \quad (2.3.41)$$

と定義できる。

Φ_{\dagger} は、厳密には (2.3.34) 式の定義では不適切である (Φ_{\ddagger} も)。 Φ_{\dagger} は、基底状態 (p が東西一様 ($= p_{\dagger}$) になるように質量を再配分した状態) における重力位置エネルギーである。図 1 で、等温位線が水平になるように質量を移動させたと考えればよい。しかし (2.3.34) 式の定義では「東西平均した地形の上にある基底状態の重力位置エネルギー」となってしまう、「基底状態の重力位置エネルギー」にはならない。

この違いを、極端な例を用いて示す。図 5 は溝がある地形を表している。簡単のため ρ は一定とし、 $d\Phi = g dz$ を用いて地面から鉛直積分を行うと、空気塊下端から上端まで積分したジオポテンシャルは、

$$\Phi_{\dagger} = g \int_0^{10} z dz \times 10 = g \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{10} \times 10 = 500g \quad (2.3.42)$$

一方、(2.3.34) 式を用いた場合、図 6 のような状況を考えていることになる。従って、

$$\Phi_{\dagger} = g \int_9^{10} z dz \times 100 = g \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_9^{10} \times 100 = 950g \quad (2.3.43)$$

このように、(2.3.34) 式を用いて Φ_{\dagger} を計算する場合は、山岳の補正に注意する必要がある⁶。

2.3.7 Exner 関数 Π_{\dagger} と Π_{\ddagger}

$$\Pi_{\dagger}(p_{\dagger}) \equiv C_p \left(\frac{p_{\dagger}}{p_0} \right)^{\kappa} \quad (2.3.44)$$

$$\Pi_{\ddagger}(p_{\ddagger}) \equiv C_p \left(\frac{p_{\ddagger}}{p_0} \right)^{\kappa} \quad (2.3.45)$$

⁶ただし、補正を加えても加えなくても結果に大きな違いは見られないことが分かっている。

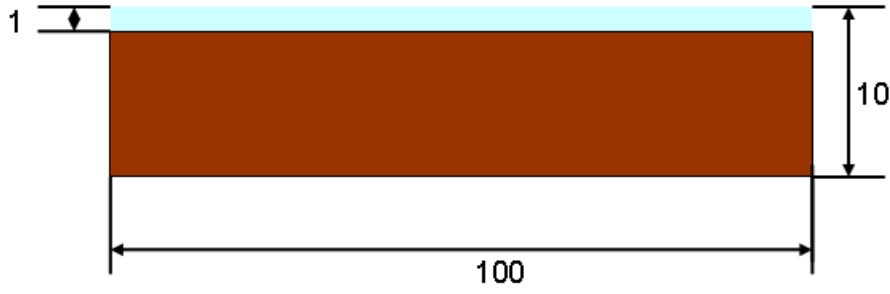


図 6: 「適切ではない」 Φ_{\dagger} の計算方法。図の見方は図 5 と同じ。

2.4 プリミティブ方程式

球面 p 系におけるプリミティブ方程式は以下の通りである。たとえば Andrews, *et al.* (1987) の (3.13a) ~ (3.13e) 式を参照のこと。

$$\frac{Du}{Dt} - \left(f + \frac{u \tan \phi}{a} \right) v = -\frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p + X \quad (2.4.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(f + \frac{u \tan \phi}{a} \right) u = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p + Y \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (2.4.3)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_z}{\partial t}}_{=0} + \nabla \cdot (\rho_z \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4.4)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{Q}{\Pi} \quad (2.4.5)$$

ただし

$$\nabla = \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (2.4.6)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.4.7)$$

(2.4.4) 式の左辺第一項は、 $\left(\frac{\partial \rho_z}{\partial t} \right)_p = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_p = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_p = 0$ 。また、 Q の単位は $[J/(kg \cdot s)] = [W/kg]$ である⁷。

次に上式を球面 z_{\dagger} 系 (p_{\dagger} 系) の方程式に書き換える。とはいってもラグランジュ微分は偏微分への展開式を変えるだけでよく、収支法の考え方から連続の式も密度の定義を変えるだけでそのまま成り立つ。便宜上、気圧傾度力は p 座標のまま残しておく。以上より球面 z_{\dagger} 系における各方程式は、

⁷文献によっては J と表記したり、(2.4.5) 式で Π で割らない場合があるので注意。

$$\frac{Du}{Dt} - \left(f + \frac{u \tan \phi}{a} \right) v = -\frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p + X \quad (2.4.8)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(f + \frac{u \tan \phi}{a} \right) u = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p + Y \quad (2.4.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial p_{\dagger}} = -\frac{RT_{\dagger}}{p_{\dagger}} \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{Q}{\Pi(p)} \quad (2.4.12)$$

ただし

$$\nabla = \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \right) \quad (2.4.13)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.4.14)$$

となる。

2.5 連続の式と流線関数

(2.4.11) 式より、 z_{\dagger} 系における連続の式を書き下すと、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{z_{\dagger}} + \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho u) \right]_{z_{\dagger}} + \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v \cos \phi) \right]_{z_{\dagger}} + \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho w_{\dagger}) = 0 \quad (2.5.1)$$

偏微分の添字が z_{\dagger} 又は p_{\dagger} の場合、以後の議論では誤解を招かない範囲で添字を省略する。両辺を $\rho_0(z_{\dagger})$ で割ると、 $* \equiv \frac{\partial p / \partial \theta}{\partial p_{\dagger} / \partial \theta} = \frac{\rho(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t)}{\rho_0(z_{\dagger})}$ より、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] + \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (v^* \cos \phi) \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 w_{\dagger}^*) = 0 \quad (2.5.2)$$

帯状平均をとると ($\bar{\rho} = \rho_0$)、 z_{\dagger} 系における帯状平均した連続の式は、

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* \cos \phi) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 \bar{w}_{\dagger}^*) = 0 \quad (2.5.3)$$

(2.5.3) 式より、平均子午面における質量フラックス ($\rho_0 \bar{v}^*, \rho_0 \bar{w}_{\dagger}^*$) は非発散であることがわかる。質量流線関数 (平均子午面循環) χ は、

$$\rho_0 \bar{v}^* = -\frac{1}{2\pi a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.5.4)$$

$$\rho_0 \bar{w}_{\dagger}^* = \frac{1}{2\pi a^2 \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \quad (2.5.5)$$

実際の解析では、先に $\overline{v^*}$ を求めてから (2.5.3) 式を用いて $\overline{w_{\dagger}^*}$ を求めることが多い。 $z_{\dagger} \rightarrow \infty$ で $\overline{w_{\dagger}^*} \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*} \right) = -\frac{\rho_0}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^*} \cos \phi) \quad (2.5.6)$$

$$\int_{\infty}^{z_{\dagger}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*} \right) dz_{\dagger} = -\int_{\infty}^{z_{\dagger}} \frac{\rho_0}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^*} \cos \phi) dz_{\dagger} \quad (2.5.7)$$

$$\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*} = \frac{1}{a \cos \phi} \int_{z_{\dagger}}^{\infty} \rho_0 \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^*} \cos \phi) dz_{\dagger} \quad (2.5.8)$$

$$\overline{w_{\dagger}^*} = \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \int_{z_{\dagger}}^{\infty} \rho_0 \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^*} \cos \phi) dz_{\dagger} \quad (2.5.9)$$

なお、連続の式を用いると一般の変数 A のラグランジュ微分は、

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial A}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial A}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.5.10)$$

$$= \frac{1}{\rho} (\rho) \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\rho a \cos \phi} (\rho u) \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} (\rho v \cos \phi) \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (\rho w_{\dagger}) \frac{\partial A}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.5.11)$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho u \cdot A) + \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v \cos \phi \cdot A) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho w_{\dagger} \cdot A) - \frac{A}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho u) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho w_{\dagger}) \right] \quad (2.5.12)$$

(2.5.1) 式より 0

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho u A) + \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v \cos \phi \cdot A) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho w_{\dagger} A) \quad (2.5.13)$$

両辺に $*$ = $\rho(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t) / \rho_0(z_{\dagger})$ を掛けて帯状平均を取ると、

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{DA}{Dt} \right)^*} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho u A)}_{=0} + \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v \cos \phi \cdot A) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho w_{\dagger} A) \\ &= \frac{\partial \overline{A^*}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{A v \cos \phi})^* + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\overline{A \rho_0 w_{\dagger}})^* \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

となる。

$z_{\dagger\dagger}$ 系についても、全微分を $z_{\dagger\dagger}$ 系で展開することで同様に導出できる。すなわち、全球平均した連続の式は、

$$\frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left(\rho_{\dagger\dagger 0} \overline{w_{\dagger\dagger}^*} \right) = 0 \quad (2.5.15)$$

一般の変数 A の全微分、およびその全球平均は、

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\dagger\dagger} A) \right]_{z_{\dagger\dagger}} + \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger} \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho_{\dagger\dagger} u A) \right]_{z_{\dagger\dagger}} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger} a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (\rho_{\dagger\dagger} v \cos \phi \cdot A) \right]_{z_{\dagger\dagger}} + \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} (\rho_{\dagger\dagger} w_{\dagger\dagger} A) \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

$$\overbrace{\left(\frac{DA}{Dt} \right)^{**}} = \left(\frac{\partial \overbrace{A^{**}}}{\partial t} \right)_{z_{\dagger\dagger}} + \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \overbrace{(\rho_{\dagger\dagger 0} w_{\dagger\dagger} A)^{**}} \quad (2.5.17)$$

2.6 東西方向の帯状平均運動方程式

(2.4.8) 式の両辺に*をかけ、帯状平均を取ると、(2.5.14) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(u \cdot v \cos \phi)^*} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(u \cdot \rho_0 w_{\dagger})^*} + \frac{\tan \phi}{a} \overline{(uv)^*} - f \overline{v^*} \\ = - \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p^* + \overline{X^*} \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

左辺第二項と第四項は、

$$\frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(uv \cos \phi)^*} + \overline{(uv \sin \phi)^*} \right] = \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(uv \cos \phi \cdot \cos \phi)^*} \right] \quad (2.6.2)$$

とまとめられるので、(2.6.1) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(u \cos \phi \cdot v \cos \phi)^*} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(u \cdot \rho_0 w_{\dagger})^*} - f \overline{v^*}}_{\textcircled{1}} \\ = \underbrace{- \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p^* + \overline{X^*}}_{\textcircled{2}} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

となる。ここで、

$$\textcircled{1} = \frac{1}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{u^* \cos \phi \cdot v^* \cos \phi} + \overline{(u'v')^* \cos^2 \phi} \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\overline{u^* \cdot \rho_0 w_{\dagger}^*} + \rho_0 \overline{(u'w_{\dagger}')^*} \right] \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(u'v')^* \cos^2 \phi} \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(u'w_{\dagger}')^*} \right] \\ &\quad + \frac{\overline{u^*}}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^* \cos \phi}) + \frac{\overline{v^*}}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u^* \cos \phi}) + \frac{\overline{u^*}}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*}) + \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{1}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(u'v')^* \cos^2 \phi} \right]}_{\equiv -D_{F\phi}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(u'w_{\dagger}')^*} \right]}_{\equiv -D_{Fz_{\dagger}}^{uw}} + \underbrace{\frac{\overline{v^*}}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u^* \cos \phi}) + \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}}}_{\text{平均流による移流項}} \\ &\quad + \overline{u^*} \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^* \cos \phi}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*}) \right] \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

(2.5.3) 式より 0

$$\textcircled{2} = -\frac{1}{a \cos \phi} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}}} \quad (2.6.7)$$

$$= -\frac{1}{a \cos \phi} \overline{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right] \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}}} \quad (2.6.8)$$

$$\left[\begin{array}{l} d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p dt + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p d\lambda + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p d\phi + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_p dp \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} \text{ より} \end{array} \right] \quad (2.6.9)$$

$$= -\frac{1}{a \cos \phi} \overline{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\dagger}} \right]} \quad (2.6.10)$$

$$= -\frac{1}{a \cos \phi} \overline{\left[\frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) - p \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{p_{\dagger}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\dagger}} \right]} \quad (2.6.11)$$

$$= -\frac{1}{a \cos \phi} \overline{\left[\frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\dagger}} \right) \right]} \quad (2.6.12)$$

$$= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \overline{\left(p \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)} \quad (2.6.13)$$

$$= \frac{1}{a \rho_0 g \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{\left(p \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)} \equiv D_{F z_{\dagger}}^{form} \quad (\text{形状抵抗}) \quad (2.6.14)$$

よって、帯状平均運動方程式は、

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} + \frac{\bar{v}^*}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* \cos \phi) + \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} - f \bar{v}^* = D_F + \bar{X}^* \quad (2.6.15)$$

となる。ただし D_F は EP フラックス発散、 \bar{X}^* は外力である。 D_F の具体的な形は以下の通りである。

$$D_F = D_{F\phi} + D_{F_{z_{\dagger}}^{uw}} + D_{F_{z_{\dagger}}^{form}} \quad (2.6.16)$$

$$D_{F\phi} = -\frac{1}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(u'v')^* \cos^2 \phi} \right] \quad (2.6.17)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \left\{ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\underbrace{-\rho_0 a \overline{(u'v')^* \cos \phi \cdot \cos \phi}}_{\equiv F_{\phi}} \right] \right\} \quad (2.6.18)$$

$= (\nabla \cdot \mathbf{F})_{\phi}$

$$D_{F_{z_{\dagger}}^{uw}} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(u'w'_{\dagger})^*} \right] \quad (2.6.19)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\underbrace{-\rho_0 a \cos \phi \overline{(u'w'_{\dagger})^*}}_{\equiv F_{z_{\dagger}}^{uw}} \right] \right\} \quad (2.6.20)$$

$= (\nabla \cdot \mathbf{F})_{z_{\dagger}}^{uw}$

$$D_{F_{z_{\dagger}}^{form}} = \frac{1}{a \rho_0 g \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) \quad (2.6.21)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\underbrace{\frac{p}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)}_{\equiv F_{z_{\dagger}}^{form}} \right] \right\} \quad (2.6.22)$$

$= (\nabla \cdot \mathbf{F})_{z_{\dagger}}^{form}$

$$(2.6.23)$$

となる。

なお、 $F_{z_{\dagger}}^{uw}$ に関しては計算の都合上、

$$F_{z_{\dagger}}^{uw} = -\rho_0 a \cos \phi \overline{\left(u' \frac{Dz_{\dagger}}{Dt} \right)^*} \quad (2.6.24)$$

$$= -\rho_0 a \cos \phi \left\{ u' \left[\underbrace{\left(\frac{\partial z_{\dagger}}{\partial t} \right)_{\lambda, \phi, \theta}}_{=0} + \underbrace{\frac{u}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \lambda} \right)_{t, \phi, \theta}}_{=0} + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{t, \lambda, \theta} + \dot{\theta} \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \theta} \right] \right\}^* \quad (2.6.25)$$

$$= -\rho_0 a \cos \phi \left[\frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \left(\frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} + \overline{(u'\dot{\theta})^*} \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \theta} \right] \quad (2.6.26)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho_0 g} \left(\frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} \\ dp_{\dagger} = \left(\frac{\partial p_{\dagger}}{\partial t} \right)_{\theta} dt + \left(\frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \lambda} \right)_{\theta} d\lambda + \left(\frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} d\phi + \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} d\theta \\ p_{\dagger} \text{ 固定、} d\phi \text{ で割ると、} \\ 0 = \left(\frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} + \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} d\theta \rightarrow \left(\frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} = \frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right)_{p_{\dagger}} \end{array} \right] \quad (2.6.27)$$

より

$$F_{z_{\dagger}}^{uw} = F_{z_{\dagger}}^{uv} + F_{z_{\dagger}}^{ut} \quad (2.6.28)$$

$$F_{z_{\dagger}}^{uv} = -\rho_0 a \cos \phi \left[\frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \left(\frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} \right] = -\rho_0 a \cos \phi \left[\frac{\overline{(u'v')^*}}{\rho_0 g a} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right)_{p_{\dagger}} \right] \quad (2.6.29)$$

$$F_{z_{\dagger}}^{ut} = -\rho_0 a \cos \phi \left[\overline{(u'\dot{\theta})^*} \frac{\partial z_{\dagger}}{\partial \theta} \right] = -\rho_0 a \cos \phi \left[-\frac{\overline{(u'\dot{\theta})^*}}{\rho_0 g} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \right] \quad (2.6.30)$$

と分割することもある。

2.6.1 EP フラックスとバランスする流線関数

(2.6.15) 式を $\overline{v^*}$ について解くと、

$$\overline{v^*} = - \left[D_F + \overline{X^*} - \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial t} - \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} \right] / [f + \overline{\zeta^*}] \quad (2.6.31)$$

$$\overline{\zeta^*} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u^*} \cos \phi) \quad (2.6.32)$$

$\overline{\zeta^*}$ は相対渦度である。さらに時間変化項、鉛直移流項、外力は小さいので、

$$\overline{v^*} \approx -\frac{D_F}{f + \overline{\zeta^*}} \quad (2.6.33)$$

もしくは (2.5.9) 式より

$$\overline{w_{\dagger}^*} \approx \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \int_{z_{\dagger}}^{\infty} \rho_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \left[-\frac{D_F}{f + \zeta^*} \cos \phi \right] dz_{\dagger} \quad (2.6.34)$$

と変形できる。この式から、EP フラックスとバランスする平均子午面循環を描くことができる。このように、波動が子午面循環を誘起するという見方を extratropical pump (Holton, *et al.*, 1995)、又は downward control principle (Haynes, *et al.*, 1991) と呼ぶことがある。同様に $\overline{X^*}$ (重力波抵抗など) についても、バランスする平均子午面循環を描くことができる。

2.6.2 TEM との関係

図7のような p 面と p_{\dagger} 面を考える。任意変数 A の p 面における帯状平均からの偏差を A'^p とおく。準備として、ある経度における θ'^p が、 p 面と p_{\dagger} 面の θ の差と一致することを示す⁸。

θ'^p の定義より、

$$\theta'^p \equiv \theta(\lambda, p) - \overline{\theta}^p(p) \quad (2.6.35)$$

$\overline{\theta}^p(p; p = p_{\dagger}) \approx \theta(p_{\dagger})$ を仮定すると、Taylor 展開より、

$$\theta(\lambda, p) \approx \theta(p_{\dagger}) + \frac{\partial \theta}{\partial p_{\dagger}} (p_{\dagger} - p) \quad (2.6.36)$$

$$\approx \overline{\theta}^p(p) + \frac{\partial \theta}{\partial p_{\dagger}} (p_{\dagger} - p) \quad (2.6.37)$$

よって

$$\theta'^p \approx \frac{\partial \theta}{\partial p_{\dagger}} (p_{\dagger} - p) \quad (2.6.38)$$

又は

$$p = p_{\dagger} - \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \theta' \quad (2.6.39)$$

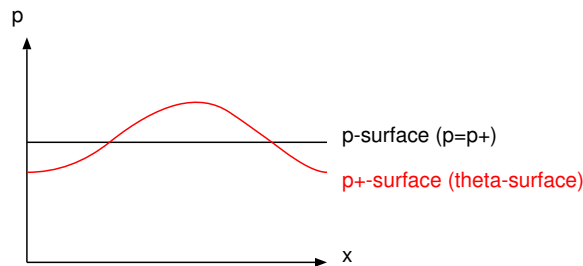


図7: 等 p 面と等 p_{\dagger} 面の関係。但し、等 p 面の p と等 p_{\dagger} 面の p_{\dagger} の値は一致しているものとする。横軸は経度。

⁸以下の説明はもっと簡単になるような気がする …

この関係を用いて、図7をもとに \bar{v}^* 、 $F_{z\uparrow}^{form}$ が TEM における残差南北速度、EP フラックスの鉛直成分で近似できることを示す。 \bar{v}^* は、

$$\bar{v}^* = f \frac{\partial \chi}{\partial p_{\uparrow}} = \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^{p_{\uparrow}} \bar{v}^* dp_{\uparrow} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^{p_{\uparrow}} \left[\int_0^L v \frac{\partial p}{\partial p_{\uparrow}} dx \right] dp_{\uparrow} \quad (2.6.40)$$

$$= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^L \left(\int_0^{p_{\uparrow}} v \frac{\partial p}{\partial p_{\uparrow}} dp_{\uparrow} \right) dx \quad (2.6.41)$$

$$= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^L \left[\int_0^{p(x, p_{\uparrow}) \text{ OR } p(x, \theta)} v dp \right] dx \quad (2.6.42)$$

$$\approx \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^L \left[\int_0^{p_{\uparrow}(x, p)} v dp + \int_{p_{\uparrow}(x, p)}^{p_{\uparrow}(x, p) - \frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial \theta} \theta'} v dp \right] dx \quad (2.6.43)$$

$$\approx \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^{p_{\uparrow}(p)} v dp \right] dx + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^L \left[v \int_{p_{\uparrow}(p)}^{p_{\uparrow}(p) - \frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial \theta} \theta'} dp \right] dx \quad (2.6.44)$$

$$= \bar{v}^p - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p_{\uparrow}} \int_0^L \left[v \frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial \theta} \theta' \right] dx \quad (2.6.45)$$

$$\approx \bar{v}^p - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial p} \int_0^L v \theta' \frac{\partial p}{\partial \theta} dx \quad (2.6.46)$$

$$\approx \bar{v}^p - \frac{\partial}{\partial p} \left[v' \theta'^p \frac{1}{\frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial p}} \right] \quad (2.6.47)$$

これは TEM 系における残差南北速度そのものである。

次に、 $F_{z\uparrow}^{form}$ を展開する準備をする。

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{\theta} d\lambda + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_{\theta} d\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta \quad (2.6.48)$$

を ϕ, p を固定して $d\lambda$ で割ることで、

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{p_{\uparrow}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)_p \quad (2.6.49)$$

が得られる。但し、 $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{\theta} = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)_{p_{\uparrow}}$ を利用した。 $F_{z\uparrow}^{form}$ を変形すると、

$$F_{z\uparrow}^{form} = \frac{p}{g} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{p_{\uparrow}}} \quad (2.6.50)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \left[p_{\uparrow} - \frac{\partial p_{\uparrow}}{\partial \theta} \theta' \right] \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)_p \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] d\lambda \quad (2.6.51)$$

ここで、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \approx \frac{\partial \bar{\Phi}^p}{\partial \theta} \quad (2.6.52)$$

を仮定し、

$$\theta' \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)_p = \theta' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \lambda} \right)_p + \theta' \left(\frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \lambda} \right)_p \quad (2.6.53)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\theta'^2}{2} \right) \quad (2.6.54)$$

を利用すると、

$$F_{z_{\dagger}}^{form} \approx -\frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \theta' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p d\lambda \quad (2.6.55)$$

地衡風の関係

$$-fv \approx -\frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \quad (2.6.56)$$

より、

$$F_{z_{\dagger}}^{form} \approx -\frac{1}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial \theta} \theta' \cdot fva \cos \phi d\lambda \quad (2.6.57)$$

$$= -\frac{fa \cos \phi}{2\pi g} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial p_{\dagger}}} \theta' v' d\lambda \quad (2.6.58)$$

$$\approx -\frac{fa \cos \phi}{g} \cdot \frac{\overline{\theta' v'^p}}{\frac{\partial \theta}{\partial p}} \quad (2.6.59)$$

これは TEM 系における EP フラックスそのものである。

2.7 東西方向の渦運動方程式

$$(2.4.8): \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{v}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{w_{\dagger} \frac{\partial u}{\partial z_{\dagger}}}_{\textcircled{3}} - fv = -\frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p + X$$

$$(2.6.15): \quad \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} + \underbrace{\frac{\bar{v}^*}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* \cos \phi)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}}}_{\textcircled{3}} - f\bar{v}^* = D_F + \bar{X}^*$$

ただし (2.4.8) 式の $\tan \phi$ の項は整理した。(2.4.8)-(2.6.15) を考えると、

$$\textcircled{1} = \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\bar{u}^* + u') = \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u'}{\partial \lambda} \quad (2.7.1)$$

$$\textcircled{2} = \frac{v}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) - \frac{\bar{v}^*}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* \cos \phi) \quad (2.7.2)$$

$$= \frac{v'}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* \cos \phi) + \frac{\bar{v}^*}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u' \cos \phi) + \frac{v'}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u' \cos \phi) \quad (2.7.3)$$

$$= \frac{v'}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* \cos \phi) + \frac{v}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u' \cos \phi) \quad (2.7.4)$$

$$\textcircled{3} = w_{\dagger} \frac{\partial u}{\partial z_{\dagger}} - \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.7.5)$$

$$= w'_{\dagger} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} + \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial u'}{\partial z_{\dagger}} + w'_{\dagger} \frac{\partial u'}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.7.6)$$

$$= w'_{\dagger} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} + w_{\dagger} \frac{\partial u'}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.7.7)$$

よって、東西方向の渦運動方程式は、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u'}{\partial \lambda} + \frac{v}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u' \cos \phi) + w_{\dagger} \frac{\partial u'}{\partial z_{\dagger}} + \frac{v'}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u^*} \cos \phi) + w'_{\dagger} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} - f v' = -D_F - \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p + X' \quad (2.7.8)$$

2.8 南北方向の帯状平均運動方程式

導出は 2.6 節と同様。(2.4.9) 式の両辺に質量重みをかけ、帯状平均を取ると、

$$\frac{\partial \overline{v^*}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v \cdot v \cos \phi})^* + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\overline{v \cdot \rho_0 w_{\dagger}})^*}_{\text{A}} + \underbrace{\frac{\tan \phi}{a} \overline{(u^2)^*}}_{\text{B}} + f \overline{u^*} = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* + \overline{Y^*} \quad (2.8.1)$$

$$\text{A} = \frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} [\overline{v^* \cdot v^* \cos \phi}] + \frac{\partial}{\partial \phi} [\overline{(v'v')^* \cos \phi}] \right\} + \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} [\overline{v^* \cdot \rho_0 w_{\dagger}^*}] + \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} [\rho_0 \overline{(v'w'_{\dagger})^*}] \right\} \quad (2.8.2)$$

$$= \frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \overline{v^* \cos \phi} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi} + \overline{v^*} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^* \cos \phi}) + \frac{\partial}{\partial \phi} [\overline{(v'v')^* \cos \phi}] \right\} + \frac{1}{\rho_0} \left\{ \rho_0 \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\dagger}} + \overline{v^*} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*}) + \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} [\rho_0 \overline{(v'w'_{\dagger})^*}] \right\} \quad (2.8.3)$$

$$= \frac{\overline{v^*}}{a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi} + \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\dagger}} + \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [\overline{(v'v')^* \cos \phi}]}_{\equiv -D_{G\phi}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} [\rho_0 \overline{(w'_{\dagger}v')^*}]}_{\equiv -D_{Gz_{\dagger}}} + \overline{v^*} \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^* \cos \phi}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 \overline{w_{\dagger}^*}) \right] \quad (2.8.4)$$

連続の式 (2.5.3) より 0

$$\text{B} = \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u^* + u')^2} = \frac{\tan \phi}{a} \left[\overline{(u^*)^2} + \overline{(u')^2} \right] \quad (2.8.5)$$

よって帯状平均した南北運動方程式は、

$$\frac{\partial \overline{v^*}}{\partial t} + \frac{\overline{v^*}}{a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi} + \overline{w_{\dagger}^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\dagger}} + \frac{\tan \phi}{a} \left[\overline{(u^*)^2} + \overline{(u')^2} \right] + f \overline{u^*} = D_G - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* + \overline{Y^*} \quad (2.8.6)$$

$$D_G = D_{G\phi} + D_{Gz_{\dagger}} \quad (2.8.7)$$

$$D_{G\phi} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(v'^2)^*} \cos \phi \right] = \frac{1}{\rho_0 a} \underbrace{\left\{ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\underbrace{-\rho_0 a \overline{(v'^2)^*} \cos \phi}_{=G_{\phi}} \right] \right\}}_{=(\nabla \cdot \mathbf{G})_{\phi}} \quad (2.8.8)$$

$$D_{Gz_{\dagger}} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(v'w'_{\dagger})^*} \right] = \frac{1}{\rho_0 a} \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\underbrace{-\rho_0 a \overline{(v'w'_{\dagger})^*}}_{=G_{z_{\dagger}}} \right] \right\}}_{=(\nabla \cdot \mathbf{G})_{z_{\dagger}}} \quad (2.8.9)$$

2.9 南北方向の渦運動方程式

(2.4.9)-(2.8.6) 式を求める。式変形は 2.7 節と同様。

$$(2.4.9): \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial v}{\partial z_{\dagger}} + \underbrace{\frac{u^2 \tan \phi}{a}}_{\textcircled{1}} + fu = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p + Y$$

$$(2.8.6): \quad \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t} + \frac{\bar{v}^*}{a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_{\dagger}} + \underbrace{\frac{\tan \phi}{a} \left[\overline{(u^*)^2} + \overline{(u'^2)^*} \right]}_{\textcircled{1}} + f\bar{u}^* = D_G - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p + \bar{Y}^*$$

$$\textcircled{1} = \frac{\tan \phi}{a} \left[u^2 - \bar{u}^{*2} - \overline{(u'^2)^*} \right] = \frac{\tan \phi}{a} \left[2\bar{u}^* u' + u'^2 - \overline{(u'^2)^*} \right] \quad (2.9.1)$$

よって、南北方向の渦運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v'}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v'}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial v'}{\partial z_{\dagger}} + \frac{v'}{a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + w_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_{\dagger}} + \frac{\tan \phi}{a} \left[2\bar{u}^* u' + u'^2 - \overline{(u'^2)^*} \right] \\ + fu' = -D_G - \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p - \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^*} \right] + Y' \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

2.10 熱力学の式

(2.4.12) 式の左辺は、

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial \theta}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.10.1)$$

=0

と展開できる。(2.4.12) 式の両辺に ρ/ρ_0 を掛けて帯状平均を取ると、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\bar{v}^*}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + \bar{w}_\dagger^* \frac{\partial \theta}{\partial z_\dagger} = \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} \quad (2.10.2)$$

$$\Pi = C_p \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa \quad (2.10.3)$$

$$C_p = C_v + R \quad (2.10.4)$$

熱力学の式は平均場のみで構成され、渦相関の項は一切含まれない。

なお、熱力学の式の flux form は、連続の式 (2.5.3) を用いると、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\theta \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\theta \rho_0 \bar{w}_\dagger^*) = \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)} \quad (2.10.5)$$

と表せる。

2.11 鉛直積算

物理量 A の鉛直積算は、

$$[A](\lambda, \phi, t) \equiv \int_{z_s}^{\infty} \rho_z A(\lambda, \phi, z_\dagger, t) dz \quad (2.11.1)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_s} A(\lambda, \phi, p, t) dp \quad (2.11.2)$$

ただし ρ_z は z 系の密度。密度が掛かっているので、質量重み付けされていることに注意。これを東西平均すると、

$$\overline{[A]}(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{g} \int_0^{p_s} A dp \right] d\lambda \quad (2.11.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{g} \int_0^{p_\dagger s} A \frac{\partial p}{\partial p_\dagger} dp_\dagger \right] d\lambda \quad (2.11.4)$$

$$\left(\text{区間 } [p_s : p_\dagger s] \text{ で } \frac{\partial p}{\partial p_\dagger} = 0 \text{ より} \right) \quad (2.11.5)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_\dagger s} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \frac{\partial p}{\partial p_\dagger} d\lambda \right] dp_\dagger \quad (2.11.6)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_\dagger s} \overline{A^*} dp_\dagger \quad (2.11.7)$$

従って、

$$\overline{[A]}(\phi, t) = \overline{[A^*]}(\phi, t) \equiv \int_{z_{\dagger s}}^{\infty} \rho_0 \overline{A^*}(\phi, z_{\dagger}, t) dz_{\dagger} \quad (2.11.8)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_{\dagger s}} \overline{A^*}(\phi, p_{\dagger}, t) dp_{\dagger} \quad (2.11.9)$$

つまり、 p で鉛直積算をしてから帯状平均した値と、質量重み付き帯状平均してから p_{\dagger} で鉛直積算した値は等価である。

2.12 鉛直積算値の全球平均

$\overline{A^*}$ の鉛直積算値の全球平均 $\langle A \rangle$ は、

$$\langle A \rangle(t) = \overline{[\overline{A^*}]} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{[A^*]}(\phi, t) \cos \phi d\phi \quad (2.12.1)$$

$$= \frac{1}{2g} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{p_{\dagger s}(\phi)} \overline{A^*}(\phi, p_{\dagger}, t) dp_{\dagger} \right] \cos \phi d\phi \quad (2.12.2)$$

$$= \frac{1}{2g} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{p_{\dagger s}} \overline{A^*} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial p_{\dagger\dagger}} dp_{\dagger\dagger} \right] \cos \phi d\phi \quad (2.12.3)$$

$$= \frac{1}{2g} \int_0^{p_{\dagger s}} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{A^*} \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial p_{\dagger\dagger}} \cos \phi d\phi \right] dp_{\dagger\dagger} \quad (2.12.4)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_{\dagger s}} \overline{[\overline{A^*}]} dp_{\dagger\dagger} = \overline{[\overline{A^*}]} \quad (2.12.5)$$

従って、鉛直積算と全球平均の順番は交換可能である。

2.13 エネルギー

2.13.1 全運動エネルギー K

$$K(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t) = \frac{1}{2} [u^2 + v^2] \quad (2.13.1)$$

$$\overline{K^*}(\phi, z_{\dagger}, t) = \frac{1}{2} \left[\overline{(u^2)^*} + \overline{(v^2)^*} \right] \quad (2.13.2)$$

なお w_{\dagger} は非断熱加熱 (=エネルギーの生成に関与) と密接に関連しているため、運動エネルギーの計算には加味しない。

2.13.2 基本場の運動エネルギー K_Z

$$K_Z(\phi, z_{\dagger}, t) = \overline{K_Z^*}(\phi, z_{\dagger}, t) \equiv \frac{1}{2} \left[(\overline{u^*})^2 + (\overline{v^*})^2 \right] \quad (2.13.3)$$

流れが完全に東西一様するとき（渦がないとき） K_Z は $\overline{K^*}$ に一致する。

2.13.3 渦運動エネルギー K_E

$$K_E(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t) \equiv \frac{1}{2} [u'^2 + v'^2] \quad (2.13.4)$$

$$\overline{K_E^*}(\phi, z_{\dagger}, t) = \frac{1}{2} \left[\overline{(u'^2)^*} + \overline{(v'^2)^*} \right] \quad (2.13.5)$$

$$(2.13.6)$$

なお、

$$\overline{K_E^*} = \frac{1}{2} \left[(u - \overline{u^*})^2 + (v - \overline{v^*})^2 \right] \quad (2.13.7)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\overline{(u^2)^*} + \overline{(v^2)^*} \right] - K_Z \quad (2.13.8)$$

$$= \overline{K^*} - K_Z \quad (2.13.9)$$

である。

2.13.4 全位置エネルギー P

位置エネルギーの考え方については、たとえば小倉 (1978) の p25-p27、p82-p87 を参照のこと。
全位置エネルギーは、内部エネルギー $C_v T$ とジオポテンシャル Φ の和として定義する。

$$P(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t) \equiv C_v T + \Phi \quad (2.13.10)$$

$$\overline{P^*}(\phi, z_{\dagger}, t) = C_v \overline{T^*} + \overline{\Phi^*} \quad (2.13.11)$$

鉛直積算は⁹、

$$[P](\lambda, \phi, t) = \frac{1}{g} \int_0^{p_s} (C_v T + \Phi) dp \quad (2.13.12)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_s} \left[C_p T + \frac{\partial}{\partial p} (p\Phi) \right] dp \quad (2.13.13)$$

$$= \frac{1}{g} \int_0^{p_s} C_p \theta p_0^{-\kappa} p^\kappa dp + \frac{p_s \Phi_s}{g} \quad (2.13.14)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{p_s} \theta \frac{\partial p^{\kappa+1}}{\partial p} dp + \frac{p_s \Phi_s}{g} \quad (2.13.15)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left\{ [\theta p^{\kappa+1}]_0^{p_s} - \int_0^{p_s} p^{\kappa+1} \frac{\partial \theta}{\partial p} dp \right\} + \frac{p_s \Phi_s}{g} \quad (2.13.16)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\theta_s p_s^{\kappa+1} + \int_{\theta_s}^{\infty} p^{\kappa+1} d\theta \right] + \frac{p_s \Phi_s}{g} \quad (2.13.17)$$

つまり

$$[P](\lambda, \phi, t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\int_{\theta_s}^{\infty} p^{\kappa+1} d\theta + \theta_s p_s^{\kappa+1} \right] + \frac{p_s \Phi_s}{g} \quad (2.13.18)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} p^{\kappa+1} d\theta + \frac{p_s \Phi_s}{g} \quad (2.13.19)$$

となる¹⁰。右辺第二項は海拔 0m を基準としたときの気柱が持つ重力位置エネルギーであり、地形が存在しない場合は 0 になる。全球平均すると全大気質量の重力位置エネルギーであるので、全球平均値は時間変化しない。以後の議論ではこの項は無視する¹¹。[P] の (質量重み付きの) 東西平均をとることで、緯度気圧断面図が得られる。

なお、 p_s は時間依存するため、

$$\frac{\partial [P]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{g} \int_0^{p_s} P dp \right) \neq \frac{1}{g} \int_0^{p_s} \frac{\partial P}{\partial t} dp = \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] \quad (2.13.20)$$

である。

2.13.5 基底状態の位置エネルギー P_G

θ 面上で p が全球一様 ($=p_{\dagger\dagger}$) であるときの位置エネルギー P_G を求める。

$$P_G(p_{\dagger\dagger}, t) \equiv C_v T_{\dagger\dagger}(p_{\dagger\dagger}, t) + \Phi_{\dagger\dagger}(p_{\dagger\dagger}, t) \quad (2.13.21)$$

⁹ $\overline{P^*}$ を p_{\dagger} で積分する方法もあるが、 P_G や P_Z との対称性を考えると P を p で積分した方がよい。

¹⁰ $C_p T + \Phi$ のままで考えない理由は、位置エネルギー計算時の誤差を減らすためである (後述)

¹¹Holton (2004) の 10 章 (Lorenz サイクル) でも、この項は無視されている。

前節と同様の計算を行うと、鉛直積算値は、

$$\langle P_G \rangle(t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\int_{\theta_{ymin}}^{\infty} p_{\dagger\dagger}^{\kappa+1} d\theta + \theta_{ymin} p_{\dagger\dagger s}^{\kappa+1} \right] + \frac{p_{\dagger\dagger s} \Phi_{\dagger\dagger s}}{g} \quad (2.13.22)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} p_{\dagger\dagger}^{\kappa+1} d\theta + \frac{p_{\dagger\dagger s} \Phi_{\dagger\dagger s}}{g} \quad (2.13.23)$$

但し θ_{ymin} は θ の全球最小値である (θ_{min} のアナロジー)。計算の際、右辺第二項は無視する。

2.13.6 基本場の位置エネルギー P_Z と有効位置エネルギー A_Z

θ 面上で p が東西一様 ($=p_{\dagger}$) であるときの位置エネルギー P_Z を求める。

$$P_Z(\phi, p_{\dagger}, t) = C_v T_{\dagger} + \Phi_{\dagger}(p_{\dagger}) \quad (2.13.24)$$

$$(2.13.25)$$

鉛直積算は、

$$[P_Z](\phi, t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\int_{\theta_{min}}^{\infty} p_{\dagger}^{\kappa+1} d\theta + \theta_{min} p_{\dagger s}^{\kappa+1} \right] + \frac{p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}}{g} \quad (2.13.26)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} p_{\dagger}^{\kappa+1} d\theta + \frac{p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}}{g} \quad (2.13.27)$$

計算の際、右辺第二項は無視する。

P_Z には全球一様な基底状態の位置エネルギー P_G も含まれており、有効位置エネルギーではない。基本場の有効位置エネルギー A_Z は、

$$A_Z(\phi, p_{\dagger}, t) \equiv P_Z(\phi, p_{\dagger}, t) - P_G(p_{\dagger}, t) \quad (2.13.28)$$

$$= C_v (T_{\dagger} - T_{\dagger\dagger}) + \Phi_{\dagger} - \Phi_{\dagger\dagger} \quad (2.13.29)$$

鉛直積算は、

$$[A_Z](\phi, t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left(\int_0^{\infty} p_{\dagger}^{\kappa+1} d\theta - \int_0^{\infty} p_{\dagger\dagger}^{\kappa+1} d\theta \right) + \frac{p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}}{g} - \frac{p_{\dagger\dagger s} \Phi_{\dagger\dagger s}}{g} \quad (2.13.30)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} (p_{\dagger}^{\kappa+1} - p_{\dagger\dagger}^{\kappa+1}) d\theta + \frac{1}{g} [p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s} - p_{\dagger\dagger s} \Phi_{\dagger\dagger s}] \quad (2.13.31)$$

よって¹²

$$[A_Z](\phi, t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\int_{\theta_{ymin}}^{\infty} (p_{\dagger}^{\kappa+1} - p_{\dagger\dagger}^{\kappa+1}) d\theta + \theta_{ymin} (p_{\dagger s}^{\kappa+1} - p_{\dagger\dagger s}^{\kappa+1}) \right] + \frac{1}{g} [p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s} - p_{\dagger\dagger s} \Phi_{\dagger\dagger s}] \quad (2.13.32)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} (p_{\dagger}^{\kappa+1} - p_{\dagger\dagger}^{\kappa+1}) d\theta + \frac{1}{g} [p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s} - p_{\dagger\dagger s} \Phi_{\dagger\dagger s}] \quad (2.13.33)$$

右辺第二項目は省略する。 θ_{ymin} は ϕ に依存しないため、南北平均を取る際は積分の順序を交換できる。全球平均を取ると (2.13.33) 式は必ず正になることから、有効位置エネルギーとしての資格を満たしている。

2.13.7 渦有効位置エネルギー A_E

$$A_E(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t) \equiv P(\lambda, \phi, z_{\dagger}, t) - P_Z(\phi, z_{\dagger}, t) \quad (2.13.34)$$

$$= C_v(T - T_{\dagger}) + \Phi - \Phi_{\dagger} \quad (2.13.35)$$

$$\overline{A_E^*}(\phi, z_{\dagger}, t) \equiv \overline{P^*}(\phi, z_{\dagger}, t) - P_Z(\phi, z_{\dagger}, t) \quad (2.13.36)$$

$$= C_v(\overline{T^*} - T_{\dagger}) + \overline{\Phi^*} - \Phi_{\dagger} \quad (2.13.37)$$

P 、 P_Z とともに P_G (基底状態の位置エネルギー) を含んでいる。つまり A_E は有効位置エネルギーである。鉛直積算すると、

$$[A_E](\lambda, \phi, t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\int_0^{\infty} p^{\kappa+1} d\theta - \int_0^{\infty} p_{\dagger}^{\kappa+1} d\theta \right] + \frac{p_s \Phi_s}{g} - \frac{p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}}{g} \quad (2.13.38)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} (p^{\kappa+1} - p_{\dagger}^{\kappa+1}) d\theta + \frac{1}{g} (p_s \Phi_s - p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}) \quad (2.13.39)$$

帯状平均すると、

$$\overline{[A_E]}(\phi, t) = \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \int_0^{\infty} (\overline{p^{\kappa+1}} - p_{\dagger}^{\kappa+1}) d\theta + \frac{1}{g} (\overline{p_s \Phi_s} - p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}) \quad (2.13.40)$$

$$= \frac{C_p p_0^{-\kappa}}{g(\kappa+1)} \left[\int_{\theta_{min}}^{\infty} (\overline{p^{\kappa+1}} - p_{\dagger}^{\kappa+1}) d\theta + \theta_{min} (\overline{p_s^{\kappa+1}} - p_{\dagger s}^{\kappa+1}) \right] + \frac{1}{g} (\overline{p_s \Phi_s} - p_{\dagger s} \Phi_{\dagger s}) \quad (2.13.41)$$

¹²このように変形する理由は、 $[P_Z]$ と $[P_G]$ はともに大きな数でかつ差が小さいので、数値計算の際の減算による誤差を出来るだけ減らすためである。

但し右辺二項目は計算に使用しない。

計算の誤差を減らすため、 $p^{\kappa+1}$ を $p = p_{\dagger}$ のまわりで Taylor 展開することがある。

$$p^{\kappa+1} \approx p_{\dagger}^{\kappa+1} + \kappa p_{\dagger}^{\kappa} (p - p_{\dagger}) + \frac{1}{2}(\kappa + 1)\kappa p_{\dagger}^{\kappa-1} (p - p_{\dagger})^2 \quad (2.13.42)$$

(質量重みのない) 帯状平均を取ると、 $(p - p_{\dagger})$ の一次の項が消える。

2.14 エネルギーの収支方程式

2.14.1 帯状平均運動エネルギー K_Z

(2.6.15) 式、(2.8.6) 式より、

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} + \frac{\bar{v}^*}{a} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \phi} + \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} - \frac{\tan \phi}{a} \bar{u}^* \cdot \bar{v}^* - f \bar{v}^* = D_F + \bar{X}^* \quad (2.14.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t} + \frac{\bar{v}^*}{a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_{\dagger}} + \frac{\tan \phi}{a} (\bar{u}^*)^2 + f \bar{u}^* = D_G - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* - \frac{\tan \phi}{a} (\bar{u}^2)^* + \bar{Y}^* \quad (2.14.2)$$

$\bar{u}^* \times (2.14.1) + \bar{v}^* \times (2.14.2)$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_Z}{\partial t} + \underbrace{\frac{\bar{v}^*}{a} \frac{\partial K_Z}{\partial \phi} + \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial K_Z}{\partial z_{\dagger}}}_{\textcircled{1}} &= \bar{u}^* D_F + \bar{v}^* D_G - \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* \\ &\quad - \frac{\bar{v}^* \tan \phi}{a} (\bar{u}^2)^* + \bar{u}^* \cdot \bar{X}^* + \bar{v}^* \cdot \bar{Y}^* \end{aligned} \quad (2.14.3)$$

ここで、連続の式を用いて移流項を变形すると ($K_Z = \bar{K}_Z^*$ に注意)、

$$\textcircled{1} = \frac{1}{a \cos \phi} \bar{v}^* \cos \phi \frac{\partial K_Z}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho_0} \bar{\rho}_0 \bar{w}_{\dagger}^* \frac{\partial K_Z}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.14.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (K_Z \bar{v}^* \cos \phi) - K_Z \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* \cos \phi) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (K_Z \bar{\rho}_0 \bar{w}_{\dagger}^*) - K_Z \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\bar{\rho}_0 \bar{w}_{\dagger}^*) \right] \end{aligned} \quad (2.14.5)$$

$$= \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (K_Z \bar{v}^* \cos \phi) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\bar{\rho}_0 K_Z \bar{w}_{\dagger}^*) \quad (2.14.6)$$

よって、帯状平均運動エネルギーの収支方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_Z}{\partial t} &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (K_Z \bar{v}^* \cos \phi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\bar{\rho}_0 K_Z \bar{w}_{\dagger}^*) + \bar{u}^* D_F + \bar{v}^* D_G \\ &\quad - \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* - \frac{\tan \phi}{a} (\bar{u}^2)^* \cdot \bar{v}^* + \bar{u}^* \cdot \bar{X}^* + \bar{v}^* \cdot \bar{Y}^* \end{aligned} \quad (2.14.7)$$

鉛直積算した帯状平均運動エネルギー

$$[K_Z] \equiv \int_{z_s}^{\infty} \rho_0 K_Z dz_{\dagger} \quad (2.14.8)$$

の収支式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial [K_Z]}{\partial t} = & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (K_Z \bar{v}^* \cos \phi) \right] + [\bar{u}^* D_F] + [\bar{v}^* D_G] \\ & - \left[\frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* \right] - \left[\frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \bar{v}^* \right] + [\bar{u}^* \cdot \bar{X}^*] + [\bar{v}^* \cdot \bar{Y}^*] \end{aligned} \quad (2.14.9)$$

さらに全球平均した帯状平均運動エネルギー

$$\langle K_Z \rangle \equiv \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [K_Z] \cos \phi d\phi \quad (2.14.10)$$

の収支式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle K_Z \rangle}{\partial t} = & \langle \bar{u}^* D_F \rangle + \langle \bar{v}^* D_G \rangle - \left\langle \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* \right\rangle - \left\langle \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \bar{v}^* \right\rangle \\ & + \langle \bar{u}^* \cdot \bar{X}^* \rangle + \langle \bar{v}^* \cdot \bar{Y}^* \rangle \end{aligned} \quad (2.14.11)$$

2.14.2 渦運動エネルギー K_E

(2.7.8)、(2.9.2) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u'}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u'}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial u'}{\partial z_{\dagger}} + \frac{v'}{a} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \phi} + w'_{\dagger} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} - \frac{\tan \phi}{a} (u'v + \bar{u}^*v') \\ = f v' - D_F - \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p + X' \end{aligned} \quad (2.14.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v'}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v'}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial v'}{\partial z_{\dagger}} + \frac{v'}{a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + w'_{\dagger} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_{\dagger}} + \frac{\tan \phi}{a} (2\bar{u}^*u' + u'^2 - \overline{(u'^2)^*}) \\ = -f u' - D_G - \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* \right] + Y' \end{aligned} \quad (2.14.13)$$

$u' \times (2.14.12) + v' \times (2.14.13)$ より

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial K_E}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial K_E}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial K_E}{\partial \phi} + w_{\dagger} \frac{\partial K_E}{\partial z_{\dagger}} + \frac{u'v'}{a} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \phi} + \frac{v'^2}{a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + u'w'_{\dagger} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} + v'w'_{\dagger} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_{\dagger}}}_{\textcircled{1}} \\
& + \underbrace{\frac{\tan \phi}{a} \left(-u'^2 v + \bar{u}^* u' v' - \overline{(u'^2)^*} v' + u'^2 v' \right)}_{\textcircled{2}} = -u' D_F - v' D_G - \frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \\
& - \frac{v'}{a} \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p - \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^*} \right]}_{\equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p} + u' X' + v' Y'
\end{aligned} \tag{2.14.14}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\rho K_E) + \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho K_E u) + \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho K_E v \cos \phi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho K_E w_{\dagger}) \\
& \quad ((2.5.13) \text{ 式より})
\end{aligned} \tag{2.14.15}$$

$$\textcircled{2} = \frac{\tan \phi}{a} \left[-u'^2 (\bar{v}^* + v') + \bar{u}^* u' v' - \overline{(u'^2)^*} v' + u'^2 v' \right] \tag{2.14.16}$$

$$= \frac{\tan \phi}{a} \left[-u'^2 \bar{v}^* + \bar{u}^* u' v' - \overline{(u'^2)^*} v' \right] \tag{2.14.17}$$

両辺に質量の重み ($* = \rho(\lambda, \phi, z_{\dagger})/\rho_0(z_{\dagger})$) を掛けると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial K_E^*}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (K_E u)^* + \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (K_E v \cos \phi)^* + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 K_E w_{\dagger})^*}_{\textcircled{1}} \\
& + \frac{(u'v')^*}{a} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \phi} + \frac{(v'^2)^*}{a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + (u'w'_{\dagger})^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} + (v'w'_{\dagger})^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_{\dagger}} \\
& + \frac{\tan \phi}{a} \left[-u'^2 \bar{v}^* + \bar{u}^* u' v' - \overline{(u'^2)^*} v' \right]^* \\
& = - (u' D_F)^* - (v' D_G)^* - \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \right]^* - \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* + (u' X')^* + (v' Y')^*
\end{aligned} \tag{2.14.18}$$

帯状平均すると、

$$\textcircled{1} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(K_E v)^*} \cos \phi \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(K_E w_{\dagger})^*} \right] \tag{2.14.19}$$

$$\tag{2.14.20}$$

より、渦運動エネルギーの収支式は、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(K_E v)^*} \cos \phi \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\uparrow}} \left[\rho_0 \overline{(K_E w_{\uparrow})^*} \right] \\
&= - \frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial \phi} - \frac{\overline{(v'^2)^*}}{a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi} - \overline{(u'w'_{\uparrow})^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\uparrow}} - \overline{(v'w'_{\uparrow})^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\uparrow}} \\
&+ \frac{\tan \phi}{a} \left[\overline{(u'^2)^*} \cdot \overline{v^*} - \overline{u^*} \cdot \overline{(u'v')^*} \right] - \overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^*} - \overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^*} \\
& \hspace{15em} + \overline{(u'X')^*} + \overline{(v'Y')^*} \tag{2.14.21}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right) = \frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \cos \phi \left[\frac{\frac{\partial \overline{u^*}}{\partial \phi} \cos \phi + \overline{u^*} \sin \phi}{\cos^2 \phi} \right] \tag{2.14.22}$$

$$= \frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial \phi} + \frac{\overline{(u'v')^*}}{a} \overline{u^*} \tan \phi \tag{2.14.23}$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(K_E v)^*} \cos \phi \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\uparrow}} \left[\rho_0 \overline{(K_E w_{\uparrow})^*} \right] \\
&= \underbrace{- \frac{\overline{(u'v')^*} \cos \phi}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right)}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{\overline{(v'^2)^*}}{a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\overline{(u'w'_{\uparrow})^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\uparrow}}}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\overline{(v'w'_{\uparrow})^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\uparrow}}}_{\textcircled{4}} \\
&+ \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \overline{v^*} - \overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^*} - \overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^*} \\
& \hspace{15em} + \overline{(u'X')^*} + \overline{(v'Y')^*} \tag{2.14.24}
\end{aligned}$$

又は、 F_{ϕ} 、 G_{ϕ} 等を用いると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(K_E v)^*} \cos \phi \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\uparrow}} \left[\rho_0 \overline{(K_E w_{\uparrow})^*} \right] \\
&= \underbrace{\frac{F_{\phi}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{G_{\phi}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{F_{z_{\uparrow}}^{uw}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\uparrow}}}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\frac{G_{z_{\uparrow}}}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\uparrow}}}_{\textcircled{4}} \\
&+ \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \overline{v^*} - \overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^*} - \overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^*} \\
& \hspace{15em} + \overline{(u'X')^*} + \overline{(v'Y')^*} \tag{2.14.25}
\end{aligned}$$

と変形できる。さらに、鉛直積算、全球平均の際の便宜を考えて変形を行うと、

$$\textcircled{1} = - \frac{1}{a \cos \phi} \overline{(u'v')^*} \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right) \tag{2.14.26}$$

$$= - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(u'v')^*} \cdot \overline{u^*} \cos \phi \right] + \frac{\overline{u^*}}{a \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(u'v')^*} \cos^2 \phi \right] \tag{2.14.27}$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\overline{u^*} F_{\phi} \right) - \overline{u^*} D_{F\phi} \tag{2.14.28}$$

$$\textcircled{2} = -\frac{1}{a \cos \phi} \overline{(v'^2)^*} \cos \phi \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} \quad (2.14.29)$$

$$= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(v'^2)^*} \cdot \bar{v}^* \cos \phi \right] + \frac{\bar{v}^*}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(v'^2)^*} \cos \phi \right] \quad (2.14.30)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* G_\phi \cos \phi) - \bar{v}^* D_{G_\phi} \quad (2.14.31)$$

$$\textcircled{3} = -\frac{1}{\rho_0} \rho_0 \overline{(u'w'_\dagger)^*} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_\dagger} \quad (2.14.32)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} \left[\rho_0 \overline{(u'w'_\dagger)^*} \bar{u}^* \right] + \frac{\bar{u}^*}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} \left[\rho_0 \overline{(u'w'_\dagger)^*} \right] \quad (2.14.33)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\bar{u}^* F_{z_\dagger}^{uw}) - \bar{u}^* D_{F_{z_\dagger}^{uw}} \quad (2.14.34)$$

$$\textcircled{4} = -\frac{1}{\rho_0} \rho_0 \overline{(v'w'_\dagger)^*} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_\dagger} \quad (2.14.35)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} \left[\rho_0 \overline{(v'w'_\dagger)^*} \bar{v}^* \right] + \frac{\bar{v}^*}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} \left[\rho_0 \overline{(v'w'_\dagger)^*} \right] \quad (2.14.36)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\bar{v}^* G_{z_\dagger}) - \bar{v}^* D_{G_{z_\dagger}} \quad (2.14.37)$$

ゆえに、渦運動エネルギーの収支式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(K_E v)^*} \cos \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} \left[\rho_0 \overline{(K_E w_\dagger)^*} \right] \\ &\quad + \frac{F_\phi}{\rho_0 a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\bar{u}^*}{\cos \phi} \right) + \frac{F_{z_\dagger}^{uw}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_\dagger} \\ &\quad + \frac{G_\phi}{\rho_0 a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \phi} + \frac{G_{z_\dagger}}{\rho_0 a} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z_\dagger} \\ &\quad + \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \bar{v}^* - \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^* - \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* \\ &\quad + \overline{(u'X')^*} + \overline{(v'Y')^*} \end{aligned} \quad (2.14.38)$$

又は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(K_E v)^*} \cos \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} \left[\rho_0 \overline{(K_E w_\dagger)^*} \right] \\ &\quad - \bar{u}^* D_{F_\phi} + \frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* F_\phi) - \bar{u}^* D_{F_{z_\dagger}^{uw}} + \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\bar{u}^* F_{z_\dagger}^{uw}) \\ &\quad - \bar{v}^* D_{G_\phi} + \frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* G_\phi \cos \phi) - \bar{v}^* D_{G_{z_\dagger}} + \frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\bar{v}^* G_{z_\dagger}) \\ &\quad + \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \bar{v}^* - \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^* - \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* \\ &\quad + \overline{(u'X')^*} + \overline{(v'Y')^*} \end{aligned} \quad (2.14.39)$$

なお、実際の計算では、

$$\overline{(KEv)^*} = \frac{1}{2} \overline{[(u'^2 + v'^2)v]^*} \quad (2.14.40)$$

$$= \frac{1}{2} \overline{[(u - \bar{u}^*)^2 v]^*} + \frac{1}{2} \overline{[(v - \bar{v}^*)^2 v]^*} \quad (2.14.41)$$

$$= \frac{1}{2} \overline{[u^2 - 2u\bar{u}^* + \bar{u}^{*2}] v]^*} + \frac{1}{2} \overline{[v^2 - 2v\bar{v}^* + \bar{v}^{*2}] v]^*} \quad (2.14.42)$$

$$= \frac{1}{2} \overline{[(u^2 v)^* - 2\overline{(uv)^*} \cdot \bar{u}^* + \bar{u}^{*2} \cdot \bar{v}^* + (v^3)^* - 2\overline{(v^2)^*} \cdot \bar{v}^* + \bar{v}^{*3}]} \quad (2.14.43)$$

$$\overline{(KEw_\dagger)^*} = \overline{\left(KE \frac{Dz_\dagger}{Dt}\right)^*} \quad (2.14.44)$$

$$= KE \left[\frac{v}{a} \left(\frac{\partial z_\dagger}{\partial \phi} \right)_\theta + \dot{\theta} \frac{\partial z_\dagger}{\partial \theta} \right]^* \quad (2.14.45)$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial z_\dagger}{\partial \phi} \right)_\theta \overline{(KEv)^*} + \frac{\partial z_\dagger}{\partial \theta} \overline{(KE\dot{\theta})^*} \quad (2.14.46)$$

$$\overline{KE\dot{\theta}} = \frac{1}{2} \overline{[(u^2 \dot{\theta})^* - 2\overline{(u\dot{\theta})^*} \cdot \bar{u}^* + \bar{u}^{*2} \cdot \bar{\dot{\theta}}^* + (v^2 \dot{\theta})^* - 2\overline{(v\dot{\theta})^*} \cdot \bar{v}^* + \bar{v}^{*2} \cdot \bar{\dot{\theta}}^*]} \quad (2.14.47)$$

等を用いる。

鉛直積算した渦運動エネルギー

$$[\overline{K_E^*}] \equiv \int \rho_0 \overline{K_E^*} dz_\dagger \quad (2.14.48)$$

の収支式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\overline{K_E^*}]}{\partial t} = & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(KEv)^*} \cos \phi \right] \right] - [\bar{u}^* D_{F\phi}] + \left[\frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u}^* F_\phi) \right] \\ & - [\bar{u}^* D_{Fz_\dagger}^{uw}] - [\bar{v}^* D_{G\phi}] + \left[\frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{v}^* G_\phi \cos \phi) \right] - [\bar{v}^* D_{Gz_\dagger}] \\ & + \left[\frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^*} \cdot \bar{v}^* \right] - \left[\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^* \right] - \left[\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* \right] \\ & + [\overline{(u'X')^*}] + [\overline{(v'Y')^*}] \end{aligned} \quad (2.14.49)$$

さらに全球平均した渦運動エネルギー

$$\langle K_E \rangle \equiv \frac{1}{2} \int [\overline{K_E^*}] \cos \phi d\phi \quad (2.14.50)$$

の収支式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle K_E \rangle}{\partial t} = & - \langle \overline{u^* D_F \phi} \rangle - \langle \overline{u^* D_F^{uw}} \rangle - \langle \overline{v^* D_G \phi} \rangle - \langle \overline{v^* D_G^{z\ddagger}} \rangle + \left\langle \frac{\tan \phi}{a} \overline{(u'^2)^* \cdot v^*} \right\rangle \\
& - \left\langle \overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^*} \right\rangle - \left\langle \overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^*} \right\rangle \\
& + \langle \overline{(u' X')^*} \rangle + \langle \overline{(v' Y')^*} \rangle
\end{aligned} \tag{2.14.51}$$

2.14.3 基底状態の位置エネルギー P_G

基底状態の位置エネルギー P_G は、

$$P_G (= \widehat{P_G^{**}}) = C_v T_{\ddagger\ddagger} + \Phi_{\ddagger\ddagger} \tag{2.14.52}$$

$$= C_p p_0^{-\kappa} (\theta p_{\ddagger\ddagger}^{\kappa}) - R T_{\ddagger\ddagger} + \Phi_{\ddagger\ddagger} \tag{2.14.53}$$

と表せる。全微分を取ると、

$$\underbrace{\frac{DP_G}{Dt}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{C_p p_0^{-\kappa} \frac{D}{Dt} (\theta p_{\ddagger\ddagger}^{\kappa})}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{D\Phi_{\ddagger\ddagger}}{Dt}}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\frac{D}{Dt} (R T_{\ddagger\ddagger})}_{\textcircled{4}} \tag{2.14.54}$$

質量の重みを付けて全球平均を取ると、(2.5.17) 式より

$$\textcircled{1} = \frac{\partial P_G}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\ddagger\ddagger}} \overbrace{(P_G \rho_{\ddagger\ddagger 0} w_{\ddagger\ddagger})^{**}} \tag{2.14.55}$$

$$\textcircled{2} = C_p p_0^{-\kappa} \theta \overbrace{\left(\frac{Dp_{\dagger\dagger}^\kappa}{Dt} \right)^{**}} + C_p p_0^{-\kappa} p_{\dagger\dagger}^\kappa \overbrace{\left(\frac{D\theta}{Dt} \right)^{**}} \quad (2.14.56)$$

$$= C_p p_0^{-\kappa} \theta \kappa p_{\dagger\dagger}^{\kappa-1} \overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}} + C_p p_0^{-\kappa} p_{\dagger\dagger}^\kappa \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi} \right)^{**}} \quad (2.14.57)$$

$$= R\theta p_0^{-\kappa} p_{\dagger\dagger}^{\kappa-1} \overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}} + \underbrace{\Pi_{\dagger\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi} \right)^{**}}_{\equiv Q_G} \quad (2.14.58)$$

$$= \frac{RT_{\dagger\dagger}}{p_{\dagger\dagger}} \overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}} + Q_G \quad (2.14.59)$$

$$= -\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial p_{\dagger\dagger}} \overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}} + Q_G \quad (2.14.60)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial p_{\dagger\dagger}} \left(\overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}} \Phi_{\dagger\dagger} \right) + \Phi_{\dagger\dagger} \underbrace{\frac{\partial \overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}}}{\partial p_{\dagger\dagger}}}_{=0(\text{連続の式より})} + Q_G \quad (2.14.61)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left(\Phi_{\dagger\dagger} \rho_{\dagger\dagger 0} \overbrace{\omega_{\dagger\dagger}^{**}} \right)}_{\heartsuit} + Q_G \quad (2.14.62)$$

$$\textcircled{3} = \frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \overbrace{\left(\Phi_{\dagger\dagger} \rho_{\dagger\dagger 0} w_{\dagger\dagger} \right)^{**}} \quad (2.14.63)$$

$$= -\frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \underbrace{\left(\Phi_{\dagger\dagger} \rho_{\dagger\dagger 0} \overbrace{w_{\dagger\dagger}^{**}} \right)}_{\heartsuit} \quad (2.14.64)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \right) \right] &= \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0} g} \left(p_{\dagger\dagger} \frac{\partial^2 \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial z_{\dagger\dagger} \partial t} + \frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \cdot \frac{\partial p_{\dagger\dagger}}{\partial z_{\dagger\dagger}} \right) \\ &= \frac{p_{\dagger\dagger}}{\rho_{\dagger\dagger 0} g} \frac{\partial}{\partial t} g - \frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \quad \text{よ} \end{aligned} \right] \quad (2.14.65)$$

$$\left[\begin{aligned} &= -\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \quad \text{よ} \end{aligned} \right] \quad (2.14.66)$$

$$\textcircled{4} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} (RT_{\dagger\dagger})}_{=-R \frac{\partial}{\partial t} (\theta p_{\dagger\dagger}^\kappa p_0^{-\kappa})_{p_{\dagger\dagger}=0}} - \frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \overbrace{(RT_{\dagger\dagger} \rho_{\dagger\dagger 0} w_{\dagger\dagger})^*} \quad (2.14.67)$$

よって P_G の収支は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_G}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left(P_G \rho_{\dagger\dagger 0} \overbrace{w_{\dagger\dagger}^{**}} \right) + Q_G \\ & -\frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left(RT_{\dagger\dagger} \rho_{\dagger\dagger 0} \overbrace{w_{\dagger\dagger}^{**}} \right) \\ & -\frac{1}{\rho_{\dagger\dagger 0}} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.14.68)$$

$$Q_G \equiv \Pi_{\dagger\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi} \right)^{**}} \quad (2.14.69)$$

右辺第一項と第三項は、 $P_G + RT_{\dagger\dagger} = C_p T_{\dagger\dagger} + \Phi_{\dagger\dagger}$ を利用して変形することもできる。
鉛直積算すると、全球平均した基本場の位置エネルギーが得られる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial P_G}{\partial t} \right\rangle = & \langle Q_G \rangle \\ & + (C_p T_{\dagger\dagger s} + \Phi_{\dagger\dagger s}) \rho_{\dagger\dagger s} \underbrace{w_{\dagger\dagger s}}_{\rightarrow 0} + \frac{p_{\dagger\dagger s}}{g} \frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger s}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.14.70)$$

なお、右辺の三項目は通常省略する。これは、(2.13.23) 式で無視した第二項目の時間微分と一致するためである。

2.14.4 基本場の位置エネルギー P_Z

基本場の平均位置エネルギー P_Z は¹³、

$$P_Z (= \overline{P_Z^*}) = C_v T_{\dagger} + \Phi_{\dagger} \quad (2.14.71)$$

$$= C_p p_0^{-\kappa} (\theta p_{\dagger}^{\kappa}) - RT_{\dagger} + \Phi_{\dagger} \quad (2.14.72)$$

と表せる。全微分を取ると、

$$\underbrace{\frac{DP_Z}{Dt}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{C_p p_0^{-\kappa} \frac{D}{Dt} (\theta p_{\dagger}^{\kappa})}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\frac{D\Phi_{\dagger}}{Dt}}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\frac{D}{Dt} (RT_{\dagger})}_{\textcircled{4}} \quad (2.14.73)$$

質量の重みを付けて帯状平均を取ると、(2.5.14) 式より

$$\textcircled{1} = \frac{\partial P_Z}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(P_Z v \cos \phi)^*} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(P_Z \rho_0 w_{\dagger})^*} \quad (2.14.74)$$

¹³ $P_Z = P_G + A_Z$ であり、有効位置エネルギー A_Z ではないことに注意。

$$\textcircled{2} = C_p p_0^{-\kappa} \theta \overline{\left(\frac{Dp_{\dagger}^{\kappa}}{Dt}\right)^*} + C_p p_0^{-\kappa} p_{\dagger}^{\kappa} \overline{\left(\frac{D\theta}{Dt}\right)^*} \quad (2.14.75)$$

$$= C_p p_0^{-\kappa} \theta \kappa p_{\dagger}^{\kappa-1} \overline{\omega_{\dagger}^*} + C_p p_0^{-\kappa} p_{\dagger}^{\kappa} \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} \quad (2.14.76)$$

$$= R \theta p_0^{-\kappa} p_{\dagger}^{\kappa-1} \overline{\omega_{\dagger}^*} + \underbrace{\Pi_{\dagger} \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*}}_{\equiv Q_{GZ}} \quad (2.14.77)$$

$$= \frac{RT_{\dagger} \overline{\omega_{\dagger}^*}}{p_{\dagger}} + Q_{GZ} \quad (2.14.78)$$

$$= -\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial p_{\dagger}} \overline{\omega_{\dagger}^*} + Q_{GZ} \quad (2.14.79)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left(\overline{\omega_{\dagger}^*} \Phi_{\dagger} \right) + \Phi_{\dagger} \frac{\partial \overline{\omega_{\dagger}^*}}{\partial p_{\dagger}} + Q_{GZ} \quad (2.14.80)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\rho_0 \overline{\omega_{\dagger}^*} \Phi_{\dagger} \right) - \Phi_{\dagger} \cdot \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\overline{v^*} \cos \phi \right) + Q_{GZ} \quad (2.14.81)$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\Phi_{\dagger} \rho_0 \overline{\omega_{\dagger}^*} \right)}_{\heartsuit} - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\Phi_{\dagger} \overline{v^*} \cos \phi \right)}_{\spadesuit} + \frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) + Q_{GZ} \quad (2.14.82)$$

$$\textcircled{3} = \frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(\Phi_{\dagger} v \cos \phi)^*} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(\Phi_{\dagger} \rho_0 \omega_{\dagger})^*} \quad (2.14.83)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] + \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\Phi_{\dagger} \overline{v^*} \cos \phi \right)}_{\spadesuit} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\Phi_{\dagger} \rho_0 \overline{\omega_{\dagger}^*} \right)}_{\heartsuit} \quad (2.14.84)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] &= \frac{1}{\rho_0 g} \left(p_{\dagger} \frac{\partial^2 \Phi_{\dagger}}{\partial z_{\dagger} \partial t} + \frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \cdot \frac{\partial p_{\dagger}}{\partial z_{\dagger}} \right) \\ &= \frac{p_{\dagger}}{\rho_0 g} \frac{\partial}{\partial t} g - \frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \quad \text{よリ} \end{aligned} \right] \quad (2.14.85)$$

$$\quad (2.14.86)$$

$$\textcircled{4} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} (RT_{\dagger})}_{=-R \frac{\partial}{\partial t} (\theta p_{\dagger}^{\kappa} p_0^{-\kappa})_{p_{\dagger}}=0} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(RT_{\dagger} v \cos \phi)^*} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(RT_{\dagger} \rho_0 \omega_{\dagger})^*} \quad (2.14.87)$$

よって基本場の位置エネルギーは、

$$\frac{\partial P_Z}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(P_Z \overline{v^*} \cos \phi \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(P_Z \rho_0 \overline{\omega_{\dagger}^*} \right) + Q_{GZ} + \frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \\ - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(RT_{\dagger} \overline{v^*} \cos \phi \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(RT_{\dagger} \rho_0 \overline{\omega_{\dagger}^*} \right) \\ - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] \quad (2.14.88)$$

$$Q_{GZ} \equiv \Pi_{\dagger} \overline{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} \quad (2.14.89)$$

鉛直積算した基本場の位置エネルギーの収支式は、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial P_Z}{\partial t} \right] = & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (P_Z \bar{v}^* \cos \phi) \right] + [Q_{GZ}] + \left[\frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \right] \\ & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (RT_{\dagger} \bar{v}^* \cos \phi) \right] \\ & + (C_p T_{\dagger s} + \Phi_{\dagger s}) \rho_0 w_{\dagger s} + \frac{p_{\dagger s}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger s}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.14.90)$$

ただし右辺三行目は無視する。

さらに全球平均した基本場の位置エネルギー $\langle P_Z \rangle$ は、

$$\left\langle \frac{\partial P_Z}{\partial t} \right\rangle = \langle Q_{GZ} \rangle + \underbrace{\left\langle \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \right\rangle}_{=-\langle C(P_Z, K_Z) \rangle} \quad (2.14.91)$$

なお、鉛直積算と全球平均の順番は交換可能であることから、 Q_{GZ} は

$$\langle Q_{GZ} \rangle = \left\langle \Pi_{\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi} \right)^* \right\rangle \quad (2.14.92)$$

$$= \left[\overbrace{\left[\Pi_{\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi} \right)^* \right]^*} \right] \quad (2.14.93)$$

とも表せる。

2.14.5 基本場の有効位置エネルギー A_Z

$$A_Z = P_Z - P_G \quad (2.14.94)$$

$$\frac{\partial A_Z}{\partial t} = \frac{\partial P_Z}{\partial t} - \frac{\partial P_G}{\partial t} \quad (2.14.95)$$

より、 A_Z のエネルギー収支式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_Z}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_Z \bar{v}^* \cos \phi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (P_Z \rho_0 \bar{w}_{\dagger}^*) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} (P_G \rho_0 \bar{w}_{\dagger\dagger}^*) \\
& + Q_Z + \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \\
& - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (RT_{\dagger} \bar{v}^* \cos \phi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (RT_{\dagger} \rho_0 \bar{w}_{\dagger}^*) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} (RT_{\dagger\dagger} \rho_0 \bar{w}_{\dagger\dagger}^*) \\
& - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \right) \right] \tag{2.14.96}
\end{aligned}$$

$$Q_Z \equiv \underbrace{\Pi_{\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi} \right)^*}_{=Q_{GZ}} - \underbrace{\Pi_{\dagger\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi} \right)^*}_{=Q_G} \tag{2.14.97}$$

ただし、地表面に関する項を省略した。
鉛直積算した A_Z の収支式は、

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial A_Z}{\partial t} \right] = & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_Z \bar{v}^* \cos \phi) \right] + [Q_Z] + \left[\frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \right] \\
& - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (RT_{\dagger} \bar{v}^* \cos \phi) \right] \tag{2.14.98}
\end{aligned}$$

さらに全球平均した A_Z は、

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial A_Z}{\partial t} \right\rangle = & \langle Q_Z \rangle + \underbrace{\left\langle \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \right\rangle}_{=-\langle C(A_Z, K_Z) \rangle = -\langle C(P_Z, K_Z) \rangle} \tag{2.14.99}
\end{aligned}$$

2.14.6 渦有効位置エネルギー A_E

渦位置エネルギー A_E は、

$$A_E = P - P_Z \tag{2.14.100}$$

$$= C_v T + \Phi - P_Z \tag{2.14.101}$$

$$= C_p T + \Phi - RT - P_Z \tag{2.14.102}$$

と表せる。全微分を取ると、

$$\frac{DA_E}{Dt} = \underbrace{\frac{D}{Dt} (C_p T)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{D\Phi}{Dt}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{D}{Dt} (RT)}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\frac{DP_Z}{Dt}}_{\textcircled{5}} \tag{2.14.103}$$

質量の重みを付けて帯状平均を取ると、(2.5.14) 式等を用いて (P_Z と違い、 $\overline{A_E^*} \neq A_E$ に注意)

$$\textcircled{1} = \frac{\partial \overline{A_E^*}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(A_E v \cos \phi)^*} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\uparrow}} \overline{(A_E \rho_0 w_{\uparrow})^*} \quad (2.14.104)$$

$$\textcircled{2} = \overline{\left[\frac{D}{Dt} (C_p T) \right]^*} \quad (2.14.105)$$

$$= C_p p_0^{-\kappa} \overline{\left[\frac{D}{Dt} (\theta p^{\kappa}) \right]^*} \quad (2.14.106)$$

$$= C_p p_0^{-\kappa} \overline{\left[\left(p^{\kappa} \frac{D\theta}{Dt} \right)^* + \left(\theta \kappa p^{\kappa-1} \frac{Dp}{Dt} \right)^* \right]} \quad (2.14.107)$$

$$= \overline{\left(\frac{\Pi Q}{\Pi} \right)^*} + \overline{(R p_0^{-\kappa} p^{\kappa-1} \theta \omega)^*} \quad (2.14.108)$$

$$= \overline{\left(\frac{\Pi Q}{\Pi} \right)^*} + \overline{\left(\frac{RT}{p} \omega \right)^*} \quad (2.14.109)$$

$$= \overline{Q^*} - \underbrace{\overline{\left(\omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^*}}_{\heartsuit} \quad (2.14.110)$$

$$\textcircled{3} = \overline{\left(\frac{D\Phi}{Dt} \right)^*} \quad (2.14.111)$$

$$= \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p^*} + \overline{\left(\frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p^*} + \overline{\left(\frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^*} + \overline{\left(\omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^*} \quad (2.14.112)$$

$$= \underbrace{\overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p^*}}_{\textcircled{A}} + \underbrace{\overline{\frac{u^*}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p^*}}_{\textcircled{B}} + \overline{\frac{v^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^*} + \underbrace{\overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)' \right]^*}}_{\textcircled{C}} + \underbrace{\overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)' \right]^*}}_{\textcircled{D}} + \underbrace{\overline{\left(\omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)^*}}_{\heartsuit} \quad (2.14.113)$$

$$\textcircled{A} = \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_p \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}}} \quad (2.14.114)$$

$$= \overline{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{p_{\dagger}} - \frac{\partial\Phi}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{p_{\dagger}}\right] \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}}} \quad (2.14.115)$$

$$\left[\begin{array}{l} d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_p dt + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)_p d\lambda + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)_p d\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial p} dp \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\lambda,\phi,p_{\dagger}} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial\Phi}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{p_{\dagger}} \quad \text{よ!} \end{array} \right] \quad (2.14.116)$$

$$= \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{p_{\dagger}} \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_{\dagger}} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{p_{\dagger}}} \quad (2.14.117)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left[p \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \right] - p \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial p_{\dagger}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.14.118)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p}{g} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(p \frac{\partial\Phi}{\partial p_{\dagger}} \right) \quad (2.14.119)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p}{g} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(p \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) \quad (2.14.120)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p}{g} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left(p \frac{\partial p}{\partial p_{\dagger}} \cdot \frac{RT}{p} \right) \quad (2.14.121)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p}{g} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \right] + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (RT)^*}_{\blacktriangle} \quad (2.14.122)$$

$$\textcircled{B} = \frac{\overline{u^*}}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial p_{\dagger}} \overline{p \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)_{p_{\dagger}}} = -\frac{\overline{u^*}}{a \rho_0 g \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{p \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)_{z_{\dagger}}} \quad (2.14.123)$$

$$= -\overline{u^*} D_F^{form}{}_{z_{\dagger}} \quad (2.14.124)$$

$$\textcircled{4} = -\overline{\left[\frac{D}{Dt}(RT)\right]^*} \quad (2.14.125)$$

$$= -\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (RT)^*}_{\blacktriangle} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(RT v \cos \phi)^*} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(RT \rho_0 w_{\dagger})^*} \quad (2.14.126)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} &= -Q_{GZ} - \frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial\Phi_{\dagger}}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{(RT_{\dagger} v^* \cos \phi)} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \overline{(RT_{\dagger} \rho_0 w_{\dagger}^*)} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger}}{g} \left(\frac{\partial\Phi_{\dagger}}{\partial t}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.14.127)$$

よって渦位置エネルギーの収支式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{A_E^*}}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(A_E v)^*} \cos \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(A_E w_{\dagger})^*} \right] + \overline{Q_E^*} - \overline{u^*} D_{F_{z_{\dagger}}}^{form} \\
& + \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^* + \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* + \frac{\overline{v^*}}{a} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^*} - \frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \\
& - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left[\overline{(RTv)^*} - RT_{\dagger} \overline{v^*} \right] \cos \phi \right\} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left\{ \rho_0 \left[\overline{(RTw_{\dagger})^*} - RT_{\dagger} \overline{w_{\dagger}^*} \right] \right\} \\
& - \frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left\{ \overline{\left[p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]} - \left[p_{\dagger} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.14.128}$$

$$\overline{Q_E^*} \equiv \overline{Q^*} - Q_{GZ} \tag{2.14.129}$$

$$= \overline{Q^*} - \Pi_{\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi} \right)^* \tag{2.14.130}$$

但し、地表面に関する項を省略した。

$\overline{A_E}$ はガリレイ変換不変量¹⁴である。しかし、(2.14.128) 式の $-\overline{u^*} D_{F_{z_{\dagger}}}^{form}$ は明らかにガリレイ変換に対して変化してしまう。そこで、

$$-\overline{u^*} D_{F_{z_{\dagger}}}^{form} = -\frac{\overline{u^*}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial F_{z_{\dagger}}^{form}}{\partial z_{\dagger}} \tag{2.14.131}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\overline{u^*} F_{z_{\dagger}}^{form} \right) + \frac{F_{z_{\dagger}}^{form}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} \tag{2.14.132}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0 g a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\overline{u^*} p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) \right] + \frac{F_{z_{\dagger}}^{form}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} \tag{2.14.133}$$

と変形すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{A_E^*}}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\overline{(A_E v)^*} \cos \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 \overline{(A_E w_{\dagger})^*} \right] + \overline{Q_E^*} + \frac{F_{z_{\dagger}}^{form}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} \\
& + \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^* + \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* + \frac{\overline{v^*}}{a} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^*} - \frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) \\
& - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left[\overline{(RTv)^*} - RT_{\dagger} \overline{v^*} \right] \cos \phi \right\} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left\{ \rho_0 \left[\overline{(RTw_{\dagger})^*} - RT_{\dagger} \overline{w_{\dagger}^*} \right] \right\} \\
& - \frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left\{ \overline{\left[p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{a \cos \phi} \overline{u^*} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) \right]} - \left[p_{\dagger} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.14.134}$$

¹⁴ガリレイ変換しても変わらない量のこと。たとえば地球に固定した系から見ても東西風にのった系から見ても、 $\overline{A_E^*}$ や $\overline{K_E^*}$ は不変である。一方、 K_Z は見る系によって値が異なるので、ガリレイ変換不変量ではない。

となる。 K_Z から変換されるエネルギーの局所的な生成率は、 $F_{z\uparrow}^{form} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z\uparrow}$ に比例する形で評価する必要がある。鉛直積算する場合は、(2.14.128) 式と (2.14.134) 式、どちらで考えても等価である。

鉛直積算した渦有効位置エネルギーの収支式は、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{A}_E^*}{\partial t} \right] = & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[(\bar{A}_E v)^* \cos \phi \right] \right] + [Q_E] + \left[\frac{F_{z\uparrow}^{form}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z\uparrow} \right] \\ & + \left[\overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^*} \right] + \left[\overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^*} \right] \\ & + \left[\overline{\frac{v^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^*}_p \right] - \left[\overline{\frac{v^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\uparrow}}{\partial \phi} \right)} \right] \\ & - \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left[(\bar{R}T v)^* - R T_{\uparrow} v^* \right] \cos \phi \right\} \right] \quad (2.14.135) \end{aligned}$$

全球平均した渦位置エネルギーの収支式は、

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A_E}{\partial t} \right\rangle = & \langle Q_E \rangle + \left\langle \frac{F_{z\uparrow}^{form}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z\uparrow} \right\rangle + \left\langle \overline{\left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^*} \right\rangle + \left\langle \overline{\left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^*} \right\rangle \\ & + \left\langle \overline{\frac{v^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^*}_p \right\rangle - \left\langle \overline{\frac{v^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\uparrow}}{\partial \phi} \right)} \right\rangle \quad (2.14.136) \end{aligned}$$

2.14.7 非断熱加熱

これまでの導出で登場してきた非断熱加熱 Q に関する式を、数値計算的な観点からまとめる。定義通り書き下すと、

$$Q = Q_{GZ} + Q_E \quad (2.14.137)$$

$$= Q_G + Q_Z + Q_E \quad (2.14.138)$$

$$Q_G = \Pi_{\dagger\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^{**}} \quad (2.14.139)$$

$$Q_{GZ} = \Pi_{\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} \quad (2.14.140)$$

$$Q_Z = Q_{GZ} - Q_G = \Pi_{\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} - \Pi_{\dagger\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^{**}} \quad (2.14.141)$$

$$Q_E = Q - Q_{GZ} = Q - \Pi_{\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} \quad (2.14.142)$$

但し

$$\Pi(p) = C_p \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \quad (2.14.143)$$

$$\Pi_{\dagger}(p_{\dagger}) = C_p \left(\frac{p_{\dagger}}{p_0}\right)^{\kappa} \quad (2.14.144)$$

$$\Pi_{\dagger\dagger}(p_{\dagger\dagger}) = C_p \left(\frac{p_{\dagger\dagger}}{p_0}\right)^{\kappa} \quad (2.14.145)$$

Q_E のみが経度依存するので、帯状平均場すると、

$$\overline{Q_E^*} = \overline{Q^*} - \Pi_{\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} = \overline{\left\{Q \left[1 - \left(\frac{p_{\dagger}}{p}\right)^{\kappa}\right]\right\}^*} \quad (2.14.146)$$

さらに南北平均をとると、

$$\widehat{Q_Z^*} = \Pi_{\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} - \Pi_{\dagger\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^{**}} = \Pi_{\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*} - \Pi_{\dagger\dagger} \overbrace{\left(\frac{Q}{\Pi}\right)^{**}} \quad (2.14.147)$$

$$= \overbrace{\left[\left(\Pi_{\dagger} - \Pi_{\dagger\dagger}\right) \left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*\right]^*} = \overbrace{\left[\left(p_{\dagger}^{\kappa} - p_{\dagger\dagger}^{\kappa}\right) \left(\frac{Q}{p^{\kappa}}\right)^*\right]^*} \quad (2.14.148)$$

$$= \overbrace{\left[\left(1 - \frac{\Pi_{\dagger\dagger}}{\Pi_{\dagger}}\right) \Pi_{\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*\right]^*} \quad (2.14.149)$$

$$\widehat{Q_E^*} = \widehat{Q^*} - \overbrace{\left[\Pi_{\dagger} \left(\frac{Q}{\Pi}\right)^*\right]^*} = \overbrace{\left\{Q \left[1 - \left(\frac{p_{\dagger}}{p}\right)^{\kappa}\right]\right\}^*} \quad (2.14.150)$$

Q_Z については、 $\Pi_{\dagger\dagger}$ (又は $p_{\dagger\dagger}$) を標準 p_{\dagger} 面で求めておけば、既存のサブルーチンで計算可能である。以上を鉛直積算することで、精度よく計算できる。

気圧座標系における非断熱加熱との関係を示す。2.6.2節と同様に Q_E を p 面のまわりで Taylor 展開すると、

$$\overline{Q_E^*} = \overline{Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa})^*} \quad (2.14.151)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa}) \frac{\partial p}{\partial p_+} d\lambda \quad (2.14.152)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_+} \int_0^{p_+} \int_0^{2\pi} Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa}) \frac{\partial p}{\partial p_+} d\lambda dp_+ \quad (2.14.153)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_+} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{p(p_+)} Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa}) dp \right] d\lambda \quad (2.14.154)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_+} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{p_+(p)} Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa}) dp + \int_{p_+(p)}^{p_+(p) - \frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta'} Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa}) dp \right] d\lambda \quad (2.14.155)$$

$$= \overline{Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa})^p} - \frac{\partial}{\partial p_+} \left[\overline{\frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta' Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa})^p} \right] \quad (2.14.156)$$

ここで、 $p_+ \approx p + \frac{\partial p_+}{\partial p} \theta'$ より、

$$p_+^\kappa p^{-\kappa} = \left(\frac{p_+}{p} \right)^\kappa \quad (2.14.157)$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{p} \frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta' \right)^\kappa \quad (2.14.158)$$

$$\approx 1 + \kappa \frac{1}{p} \frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta' \quad (2.14.159)$$

なので、

$$\overline{Q_E^*} \approx -Q \frac{\kappa}{p} \frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta' - \frac{\partial}{\partial p_+} \left[\overline{\frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta' Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa})^p} \right] \quad (2.14.160)$$

$$\approx -\frac{\kappa}{p} \frac{1}{\partial \theta^p / \partial p} \overline{Q' \theta'^p} - \frac{\partial}{\partial p} \left[\overline{\frac{\partial p_+}{\partial \theta} \theta' Q(1 - p_+^\kappa p^{-\kappa})^p} \right] \quad (2.14.161)$$

特に鉛直積算を考えると第二項が消えるので、

$$\frac{1}{g} \int_0^{p_s} \overline{Q_E^*} dp \approx -\frac{\kappa}{g} \int_0^{p_s} \frac{1}{p(\partial \theta^p / \partial p)} \overline{Q' \theta'^p} dp \quad (2.14.162)$$

ゆえに、 Q_E の鉛直積算は非断熱加熱と温位の渦相関におおよそ比例する。

2.15 エネルギー変換

2.15.1 記号の意味

$C(X, Y)$ と表記した場合、エネルギー X からエネルギー Y への変換率を表す。ただし、局所的な(全球平均でない)エネルギー変換を考える場合は、 X の消滅率という意味であり、 Y の生

成率ではないことに注意が必要である。全球平均した場合は、 $C(X, Y)$ と $-C(Y, X)$ は一致する。

2.15.2 A_Z と K_Z

A_Z の収支式から

$$C(A_Z, K_Z) = -C(K_Z, A_Z) \equiv -\frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right) = -\frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial M_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} \quad (2.15.1)$$

補足

本来であれば、 A_Z と A_E の収支式に含まれる共通項をエネルギー変換と考えるべきかもしれない。しかし、本文中で $C(A_Z, K_Z)$ と定義したのは、 $\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi}$ という力に抗って \bar{v}^* で運動するという「仕事」によって、基本場の有効位置エネルギーが基本場の運動エネルギーに解放されると解釈できるためである。 $C(A_Z, K_Z)$ には渦の項が入っていないため、基本場から波動への変換と考えるには不自然である。逆に、後で登場する $C(A_Z, K_Z)$ にこの項を押しつけることで、 $\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} - \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right)^*$ という東西偏差場が登場するため、自然な解釈が可能である。

2.15.3 K_Z と A_E

K_Z と A_E の収支式の比較より (A_Z からのエネルギーの流入に注意)

$$C(K_Z, A_E) \equiv C(K_Z, A_E)^u + C(K_Z, A_E)^v \quad (2.15.2)$$

$$C(K_Z, A_E)^u \equiv -\bar{u}^* D_{F_{z_{\dagger}}}^{form} \quad (2.15.3)$$

$$C(K_Z, A_E)^v \equiv \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* - \underbrace{\frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial \phi} \right)}_{=C(A_Z, K_Z)} = \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial M}{\partial \phi} \right)_{\theta}^* - \frac{\bar{v}^*}{a} \left(\frac{\partial M_{\dagger}}{\partial \phi} \right)_{\theta} \quad (2.15.4)$$

$$-C(A_E, K_Z) \equiv -C(A_E, K_Z)^u - C(A_E, K_Z)^v \quad (2.15.5)$$

$$-C(A_E, K_Z)^u \equiv \frac{F_{z_{\dagger}}^{form}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.15.6)$$

$$-C(A_E, K_Z)^v = C(K_Z, A_E)^v \quad (2.15.7)$$

鉛直積算すると、 $C(K_Z, A_E)$ と $-C(A_E, K_Z)$ は等しくなる。したがって $C(K_Z, A_E)$ は「平均東西風と鉛直 EP フラックス収束の積」、 $-C(A_E, K_Z)$ は「平均東西風の鉛直シアと鉛直 EP フラックスの積」という二通りの解釈ができる。

2.15.4 K_Z と K_E

K_Z と $\overline{K_E^*}$ 、それぞれの収支式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_Z}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (K_Z \overline{v^*} \cos \phi) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left(\rho_0 K_Z \overline{w_{\dagger}^*} \right) \\ & + \underbrace{\overline{u^*} D_{F\phi}}_{\text{A}} + \underbrace{\overline{u^*} D_{Fz_{\dagger}}^{form}}_{\text{B}} + \underbrace{\overline{u^*} D_{Fz_{\dagger}}^{uw}}_{\text{C}} + \underbrace{\overline{v^*} D_{G\phi}}_{\text{D}} + \underbrace{\overline{v^*} D_{Gz_{\dagger}}}_{\text{D}} \\ & - \frac{\overline{v^*}}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^* - \underbrace{\frac{\tan \phi}{a} (\overline{u'^2})^* \cdot \overline{v^*} + \overline{u^*} \cdot \overline{X^*} + \overline{v^*} \cdot \overline{Y^*}}_{\text{E}} \end{aligned} \quad (2.15.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[(\overline{K_E v})^* \cos \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 (\overline{K_E w_{\dagger}})^* \right] \\ & + \underbrace{\frac{F_{\phi}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right)}_{\text{a}} + \underbrace{\frac{F_{z_{\dagger}}^{uw}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}}}_{\text{b}} \\ & + \underbrace{\frac{G_{\phi}}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi}}_{\text{c}} + \underbrace{\frac{G_{z_{\dagger}}}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\dagger}}}_{\text{d}} \\ & + \underbrace{\frac{\tan \phi}{a} (\overline{u'^2})^* \cdot \overline{v^*}}_{\text{e}} - \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p' \right]^* - \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p' \right]^* \\ & + \overline{(u' X')^*} + \overline{(v' Y')^*} \end{aligned} \quad (2.15.9)$$

又は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{K_E^*}}{\partial t} = & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[(\overline{K_E v})^* \cos \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\rho_0 (\overline{K_E w_{\dagger}})^* \right] \\ & - \underbrace{\overline{u^*} D_{F\phi} + \frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u^*} F_{\phi})}_{\text{a}} - \underbrace{\overline{u^*} D_{Fz_{\dagger}}^{uw} + \frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\overline{u^*} F_{z_{\dagger}}^{uw})}_{\text{b}} \\ & - \underbrace{\overline{v^*} D_{G\phi} + \frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^*} G_{\phi} \cos \phi)}_{\text{c}} - \underbrace{\overline{v^*} D_{Gz_{\dagger}} + \frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\overline{v^*} G_{z_{\dagger}})}_{\text{d}} \\ & + \underbrace{\frac{\tan \phi}{a} (\overline{u'^2})^* \cdot \overline{v^*}}_{\text{e}} - \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p' \right]^* - \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p' \right]^* \\ & + \overline{(u' X')^*} + \overline{(v' Y')^*} \end{aligned} \quad (2.15.10)$$

全球平均すると、 $\text{A} = -\text{a}$ 、 $\text{B} = -\text{b}$ 、 $\text{C} = -\text{c}$ 、 $\text{D} = -\text{d}$ 、 $\text{E} = -\text{e}$ であり、これらを通じて K_Z と K_E はエネルギーの交換を行う。従って、エネルギー変換項は以下のように定義できる。

$$C(K_Z, K_E) \equiv C(K_Z, K_E)^{uy} + C(K_Z, K_E)^{uz} + C(K_Z, K_E)^{vy} + C(K_Z, K_E)^{vz} + C(K_Z, K_E)^{tan} \quad (2.15.11)$$

$$C(K_Z, K_E)^{uy} \equiv -\overline{u^*} D_F \phi \quad (2.15.12)$$

$$C(K_Z, K_E)^{uz} \equiv -\overline{u^*} D_{F_{z_{\dagger}}}^{uw} \quad (2.15.13)$$

$$C(K_Z, K_E)^{vy} \equiv -\overline{v^*} D_G \phi \quad (2.15.14)$$

$$C(K_Z, K_E)^{vz} \equiv -\overline{v^*} D_{G_{z_{\dagger}}} \quad (2.15.15)$$

$$C(K_Z, K_E)^{tan} \equiv \frac{\tan \phi}{a} (\overline{u'^2})^* \cdot \overline{v^*} \quad (2.15.16)$$

$$(2.15.17)$$

$$C(K_E, K_Z) \equiv C(K_E, K_Z)^{uy} + C(K_E, K_Z)^{uz} + C(K_E, K_Z)^{vy} + C(K_E, K_Z)^{vz} + C(K_E, K_Z)^{tan} \quad (2.15.18)$$

$$C(K_E, K_Z)^{uy} \equiv -\frac{F_{\phi}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right) \quad (2.15.19)$$

$$C(K_E, K_Z)^{uz} \equiv -\frac{F_{z_{\dagger}}^{uw}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.15.20)$$

$$C(K_E, K_Z)^{vy} \equiv -\frac{G_{\phi}}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi} \quad (2.15.21)$$

$$C(K_E, K_Z)^{vz} \equiv -\frac{G_{z_{\dagger}}}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_{\dagger}} \quad (2.15.22)$$

$$C(K_E, K_Z)^{tan} \equiv -\frac{\tan \phi}{a} (\overline{u'^2})^* \cdot \overline{v^*} \quad (2.15.23)$$

なお、 K_E の生成率に注目すると、

$$-C(K_E, K_Z)^{uy} = C(K_Z, K_E)^{uy} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{u^* F_\phi})}_{\text{dkedt_uy}} = \frac{F_\phi}{\rho_0 a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\overline{u^*}}{\cos \phi} \right) \quad (2.15.24)$$

$$-C(K_E, K_Z)^{uz} = C(K_Z, K_E)^{uz} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\overline{u^* F_{z_\dagger}^{uw}})}_{\text{dkedt_uz}} = \frac{F_{z_\dagger}^{uw}}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial z_\dagger} \quad (2.15.25)$$

$$-C(K_E, K_Z)^{vy} = C(K_Z, K_E)^{vy} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{v^* G_\phi \cos \phi})}_{\text{dkedt_vy}} = \frac{G_\phi}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial \phi} \quad (2.15.26)$$

$$-C(K_E, K_Z)^{vz} = C(K_Z, K_E)^{vz} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial z_\dagger} (\overline{v^* G_{z_\dagger}})}_{\text{dkedt_vz}} = \frac{G_{z_\dagger}}{\rho_0 a} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial z_\dagger} \quad (2.15.27)$$

という関係が成り立つ。 $\overline{u^* F_\phi}$ などを wave energy flux、 dkedt_uy など下括弧の項を wave energy flux divergence と呼ぶ。 K_Z と K_E の間のエネルギー変換を考える場合、 K_Z の消滅率と K_E の生成率は wave energy flux divergence の分だけ位置がずれることになる (もちろん、全球平均値は同じ)。

2.15.5 A_E と K_E

$$C(A_E, K_E) = -C(K_E, A_E) \equiv C(A_E, K_E)^u + C(P_E, K_E)^v \quad (2.15.28)$$

$$C(A_E, K_E)^u = -C(K_E, A_E)^u \equiv - \left[\frac{u'}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)'_p \right]^* \quad (2.15.29)$$

$$= - \left[\frac{u}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \right]^* + \frac{\overline{u^*}}{a \cos \phi} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p^*} \quad (2.15.30)$$

$$= - \left[\frac{u}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \right]^* \underbrace{- \overline{u^* D_{F_{z_\dagger}}^{form}}}_{=C(K_Z, P_E)^u} \quad (2.15.31)$$

$$C(A_E, K_E)^v = -C(K_E, A_E)^v \equiv - \left[\frac{v'}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)'_p \right]^* \quad (2.15.32)$$

$$= - \left[\frac{v}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p \right]^* + \frac{\overline{v^*}}{a} \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_p^*} \quad (2.15.33)$$

2.16 局所的なエネルギー収支

エネルギー収支方程式を、前節で定義したエネルギー変換項を用いて表す。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_Z}{\partial t} &= Q_Z - C(A_Z, K_Z) \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_Z \bar{v}^* \cos \phi)}_{\text{dazdt_vpz}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (P_Z \rho_0 \bar{w}_{\dagger}^*)}_{\text{dpzdt_wpz}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} (P_G \rho_0 \bar{w}_{\dagger\dagger}^*)}_{\text{dpgdt_wpz}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (RT_{\dagger} \bar{v}^* \cos \phi)}_{\text{dazdt_vt}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (RT_{\dagger} \rho_0 \bar{w}_{\dagger}^*)}_{\text{dpzdt_wt}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} (RT_{\dagger\dagger} \rho_0 \bar{w}_{\dagger\dagger}^*)}_{\text{dpgdt_wt}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right]}_{\text{dpzdt_phi}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger\dagger}} \left[\frac{p_{\dagger\dagger}}{g} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger\dagger}}{\partial t} \right) \right]}_{\text{dpgdt_phi}} \tag{2.16.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_Z}{\partial t} &= \bar{u}^* \cdot \bar{X}^* + \bar{v}^* \cdot \bar{Y}^* + C(A_Z, K_Z) - C(K_Z, A_E) - C(K_Z, K_E) \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (K_Z \bar{v}^* \cos \phi)}_{\text{dkzdt_vkz}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} (\rho_0 K_Z \bar{w}_{\dagger}^*)}_{\text{dkzdt_wkz}} \tag{2.16.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}_E^*}{\partial t} &= \bar{Q}_E^* + C(K_Z, A_E) - C(A_E, K_E) \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [(\bar{A}_E v)^* \cos \phi]}_{\text{daedt_vae}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} [\rho_0 (\bar{A}_E w_{\dagger})^*]}_{\text{daedt_wae}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ [(\bar{RT} v)^* - RT_{\dagger} \bar{v}^*] \cos \phi \right\}}_{\text{daedt_vt}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left\{ \rho_0 [(\bar{RT} w_{\dagger})^* - RT_{\dagger} \bar{w}_{\dagger}^*] \right\}}_{\text{daedt_wt}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} \left\{ \left[\bar{p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] - \left[p_{\dagger} \left(\frac{\partial \Phi_{\dagger}}{\partial t} \right) \right] \right\}}_{\text{daedt_phi}} \tag{2.16.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{K}_E^*}{\partial t} &= (\bar{u}' X')^* + (\bar{v}' Y')^* - C(K_E, K_Z) + C(A_E, K_E) \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [(\bar{K}_E v)^* \cos \phi]}_{\text{dkedt_vke}} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_{\dagger}} [\rho_0 (\bar{K}_E w_{\dagger})^*]}_{\text{dkedt_wke}} \tag{2.16.4}
\end{aligned}$$

下括弧で名前が付けられた項は、鉛直積算・全球平均をとることで0になる。

2.17 全球積分したエネルギー変換

$$\left\langle \frac{\partial A_Z}{\partial t} \right\rangle = \langle Q_Z \rangle - \langle C(A_Z, K_Z) \rangle \quad (2.17.1)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial K_Z}{\partial t} \right\rangle &= \langle \overline{u^* \cdot X^*} \rangle + \langle \overline{v^* \cdot Y^*} \rangle \\ &+ \langle C(A_Z, K_Z) \rangle - \langle C(K_Z, A_E) \rangle - \langle C(K_Z, K_E) \rangle \end{aligned} \quad (2.17.2)$$

$$\left\langle \frac{\partial A_E}{\partial t} \right\rangle = \langle Q_E \rangle + \langle C(K_Z, A_E) \rangle - \langle C(A_E, K_E) \rangle \quad (2.17.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial K_E}{\partial t} \right\rangle = \langle \overline{(u'X')^*} \rangle + \langle \overline{(v'Y')^*} \rangle + \langle C(K_Z, K_E) \rangle + \langle C(A_E, K_E) \rangle \quad (2.17.4)$$

参考文献

- Andrews, D. G., J. R. Holton and C. B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*. International geophysics series, Academic Press.
- Haynes, P. H., C. J. Marks, M. E. McIntyre, T. G. Shepherd and K. P. Shine, 1991: On the ‘downward control’ of extratropical diabatic circulations by eddy-induced mean zonal forces. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 651–679.
- Holton, J. R., 2004: *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Vol. 88 of *International Geophysics Series*, Academic Press, 4 edition, 535pp.
- Holton, J. R., P. H. Haynes, M. E. McIntyre, A. R. Douglass, R. B. Rood and L. Pfister, 1995: Stratosphere-troposphere exchange. *Rev. Geophys.*, **33**, 403–439.
- Iwasaki, T., 1989: A diagnostic formulation for wave-mean flow interactions and Lagrangian-mean circulation with a hybrid vertical coordinate of pressure and isentropes. *J. Meteor. Soc. Japan*, **67**, 293–312.
- Iwasaki, T., 2001: Atmospheric energy cycle viewed from wave-mean-flow interaction and Lagrangian mean circulation. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 3036–3052.
- Miyazaki, K. and T. Iwasaki, 2005: Diagnosis of meridional ozone transport based on mass-weighted isentropic zonal means. *J. Atmos. Sci.*, **62**, 1192–1208.
- Tanaka, D., T. Iwasaki, S. Uno, M. Ujiie and K. Miyazaki, 2004: Eliassen-Palm flux diagnosis based on isentropic representation. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2370–2383.
- Uno, S. and T. Iwasaki, 2006: A cascade-type global energy conversion diagram based on wave-mean flow interactions. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 3277–3295.
- 高見穎郎, 河村哲也, 1994: 偏微分方程式の差分解法. 東京大学基礎工学双書, 東京大学出版会.
- 氏家将志, 2007: 温位座標に基づく EP フラックスの定式化 (球座標編). ノート.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249pp.